令和５年度

筑波大学大学院 入学試験

理工情報生命学術院 数理物質科学研究群

数学学位プログラム 試験問題

専門科目

注意事項

1. 問題冊子はこの表紙を入れて８枚からなる．試験開始の合図があるまでは問題冊子を開けないこと．
2. 問題は［1］,［2］,［3］,［4］,［5］,［6］の６題ある．そのうち３題選択し解答せよ．ただし，
   ［3］ を選択する場合には（A）,（B）のいずれか一つに答えよ．両方を選ぶことはできない．
   ［4］ を選択する場合には（C）,（D）のいずれか一つに答えよ．両方を選ぶことはできない．
   ［6］ を選択する場合には（G）,（H）,（I）,（J）のいずれか一つに答えよ．二つ以上を選ぶことはできない．
3. 答案冊子は答案用紙３枚からなる．それぞれの答案用紙に，学術院名・研究群名・学位プログラム名・受験番号を記入すること．解答は１題につき答案用紙１枚とし，それぞれの答案用紙の左上に解答する問題番号を記入せよ．また,［3］,［4］,［5］,［6］では（A）,（B）,（C）,（D）,（E）,（F）,（G）,（H）,（I）,（J）の記号も記入せよ．おもて面だけで書ききれない場合には,「ウラへ」と明記して裏面を使用してよい．
4. 下書用紙は３枚ある．それぞれの下書用紙に，学術院名・研究群名・学位プログラム名・受験番号を記入すること．
5. 問題冊子も下書用紙も回収する．

数学

注意　$\mathbb{C}$ は複素数全体，$\mathbb{R}$ は実数全体，$\mathbb{Q}$ は有理数全体，$\mathbb{Z}$ は整数全体，$\mathbb{N}$ は自然数全体のなす集合を，それぞれ表すものとする．

[1] 以下の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\varepsilon}^{1}(2x^3-x)\log x\,dx$ を求めよ．

(2) 開区間 $(0,\infty)$ 上の 2 回微分可能な実数値関数 f に対して，$\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ 上の実数値関数 F を

$$F(x,y)=f(r(x,y))$$

により定める．ただし，$r(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ である．

(a) $(\Delta F)(x,y)=f''(r(x,y))+\dfrac{1}{r(x,y)}f'(r(x,y))$ となることを示せ．ただし，$\Delta F=\dfrac{\partial^2 F}{\partial^2 x}+\dfrac{\partial^2 F}{\partial^2 y}$ である．

(b) $\Delta F=0$ かつ $f(1)=0$ かつ $f(e)=\frac{1}{2\pi}$ となる f を求めよ．

(3) $g(r)=(r^2-1)^2$ とし，$G(x,y)=g(r(x,y))$ と定める．$0<\varepsilon<1$ に対して

$$\Omega_\varepsilon=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid \varepsilon^2\le x^2+y^2\le 1\}$$

と定める．(2) (b) で求めた f に対し

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\iint_{\Omega_\varepsilon}F(x,y)\,(\Delta G)(x,y)\,dxdy$$

を求めよ．

数学

［2］ 4 次正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

とし，行列 B を $B = A^2 - E$ で定める．ただし E は 4 次単位行列である．また，行列 A，B の定める $\mathbb{R}^4$ の線形変換をそれぞれ f，g とする．つまり，

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}, \qquad g(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

である．以下の問いに答えよ．

(1) 行列 B および A^3 を求めよ．

(2) g の像 $\mathrm{Im}(g)$ の基底を 1 組求めよ．また，$\mathrm{Im}(g)$ の f による像 $f(\mathrm{Im}(g))$ を求めよ．

(3) g の核 $\mathrm{Ker}(g)$ は次の部分空間 V_1，V_2 の直和であることを証明し，V_1，V_2 の基底をそれぞれ 1 組求めよ．

$$V_1 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \mid f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\}, \qquad V_2 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \mid f(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{x}\}.$$

(4) f の表現行列が対角行列となる $\mathbb{R}^4$ の基底を 1 組与え，その基底に関する表現行列 C を求めよ．

(5) (4) で選んだ $\mathbb{R}^4$ の基底に関する g の表現行列 D を求めよ．

数学

［3］　次の（**A**），（**B**）のうち **1** つを選び解答せよ．

（**A**）k は体とする．X，Y，t は不定元とし k 上の多項式環の間の環準同型

$$\Phi\colon k[X,Y] \to k[t]$$

を

$$\Phi(f(X,Y)) = f(t^2-1, t^3-t) \qquad (f(X,Y) \in k[X,Y])$$

によって定める．A は剰余環 $k[X,Y]/(Y^2 - X^2(1+X))$ とする．$\pi\colon k[X,Y] \to A$ は自然な環準同型とし，$x = \pi(X)$，$y = \pi(Y)$ とおく．以下の問いに答えよ．

(1) 環準同型 $\varphi\colon A \to k[t]$ が一意に存在して $\Phi = \varphi \circ \pi$ が成立することを示せ．

(2) $i = 1, 2, 3$ に対し，A のイデアル M_i を

$$M_i = \begin{cases} (x, y) & (i = 1), \\ (x, y+1) & (i = 2), \\ (x+1, y) & (i = 3) \end{cases}$$

で定める．各 $i = 1, 2, 3$ に対し，k 上のベクトル空間 $k[t]/\varphi(M_i)k[t]$ の次元を求めよ．ただし $\varphi(M_i)k[t]$ は $\varphi(M_i)$ が生成する $k[t]$ のイデアルを表す．

(3) $\varphi\colon A \to k[t]$ は単射であることを示せ．

（**B**）以下の問いに答えよ．

(1) G を群とし，H，K を G の部分群とする．$K/H \cap K$ から G/H への単射が存在することを示せ．

(2) G を群とし，H，K を G の正規部分群とする．このとき，$H \cap K$ も G の正規部分群であることを示せ．また，G/H と G/K が共にアーベル群であれば，$G/H \cap K$ もアーベル群であることを示せ．

(3) G を有限アーベル群とし，p を素数とする．p が G の位数（サイズ）を割り切るならば，G には位数 p の元が存在することを示せ．

(4) G を群とし，H を G の空ではない有限部分集合とする．H が条件

$$a, b \in H \text{ ならば } ab \in H$$

を満たすならば，H は部分群であることを示せ．

数学

［4］ 次の（**C**），（**D**）のうち１つを選び 解答せよ．

（**C**）$a > b > 0$ とする．$\mathbb{R}^3$ 内の曲面 S を

$$S = \{((a + b\cos u)\cos v, (a + b\cos u)\sin v, b\sin u) \mid 0 \leq u \leq 2\pi,\ 0 \leq v \leq 2\pi\}$$

によって定める．$-b < t < b$ とし，

$$S_t = \{(x, y, z) \in S \mid z \leq t\}$$

とする．

(1) S_t の境界 $\{(x, y, z) \in S \mid z = t\}$ の各連結成分の長さを求めよ．

(2) S の曲面積と S_t の曲面積を求めよ．

(3) S のガウス曲率 K の S_t 上の面積分を求めよ．

（**D**）X を弧状連結な位相空間とし，Y を位相空間とする．$f\colon X \to Y$，$g\colon Y \to X$ をともに連続写像とする．

(1) $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ のとき，Y は弧状連結であることを示せ．

(2) $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$ のとき，Y は弧状連結であることを示せ．ただし，$f_0, f_1\colon A \to B$ に対して，連続写像 $H\colon A \times [0, 1] \to B$ で，任意の $x \in A$ に対して $H(x, 0) = f_0(x)$ と $H(x, 1) = f_1(x)$ をみたすものが存在するとき，$f_0 \simeq f_1$ と表す．

(3) $\mathbb{R}$ にユークリッド位相を与え，$f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ を包含写像とする．連続写像 $g\colon \mathbb{R} \to [0, 1]$ を適切に与えて，$f \circ g \simeq \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ を示せ．

数学

［5］ 次の（**E**），（**F**）の両方に解答せよ．

（**E**）$t > 0$ とし，$\mathbb{C}$ 上の関数 f を

$$f(z) = \frac{e^{itz}}{z^2+1}$$

と定める．

(1) 上半平面 $\mathrm{Im}z > 0$ における $f(z)$ の極を求め，そこでの留数を計算せよ．

(2) $R > 1$ とし，

$$C_R = \{Re^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \theta \leq \pi\} \cup [-R, R]$$

とする．また，C_R の向きは反時計回りにとるものとする．$\displaystyle\int_{C_R} f(z)\,dz$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{x^2+1}\,dx$ を求めよ．

（**F**）開区間 $(1, \infty)$ 上の関数 f_n，g をそれぞれ

$$f_n(x) = \frac{1}{x^2 + \cos(\frac{x}{n})} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$
$$g(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

と定める．

(1) 区間 $(1, \infty)$ において，$0 < f_n(x) \leq g(x)$ となることを示せ．

(2) $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{\infty} g(x)\,dx$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{\sqrt{3}}^{\infty} f_n(x)\,dx$ を求めよ．

$\boxed{\text{数学}}$

［6］ 次の（G），（H），（I），（J）のうち１つを選び 解答せよ．

（G）$(\mathbb{R}, <)$ を実数のなす自然な順序集合，X を最大元を持たない $\mathbb{R}$ の部分集合で，$(X, <)$ が整列順序集合となるようなものとする．$a \in X$ に対し，集合 $\{x \in X \mid a < x\}$ の最小元を a^+ と表す．次を示せ．

(1) $a, b \in X$ かつ $a \neq b$ ならば，開区間 (a, a^+) と開区間 (b, b^+) の共通部分は空である．

(2) $\mathbb{R}$ の開区間からなる集合 $\{(a, a^+) \mid a \in X\}$ の濃度は X の濃度と等しい．

(3) $(Y, <_Y)$ を整列順序集合とする．Y が非可算集合であれば，順序を保つ単射 $f\colon Y \to \mathbb{R}$ は存在しない．

（H）確率変数 X は次の確率密度関数

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\theta x}} \exp\left(-\dfrac{(\log x)^2}{2\theta}\right) & (x > 0), \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

をもつとし，この分布にしたがう母集団から無作為標本 $X_1, \ldots, X_n$ を抽出したとする．ただし，$\theta > 0$ とする．

(1) $Y = \log X$ とおく．Y の積率母関数を求めよ．また，Y^2 の平均 $E_\theta(Y^2)$ を求めよ．

(2) $X_1, \ldots, X_n$ を用いて，θ の不偏推定量 $\widehat{\theta}_n$ を 1 つ与え，その分散 $\mathrm{Var}_\theta(\widehat{\theta}_n)$ を求めよ．

(3) (2) で与えた $\widehat{\theta}_n$ が θ の一様最小分散不偏（UMVU）推定量となっているか確認せよ．

数学

(I) $f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 - 1$，$g(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ とする．

(1) f と g の最大公約式 $d(x) \in \mathbb{Q}[x]$，および

$$s(x)f(x) + t(x)g(x) = d(x), \quad \deg s < \deg g, \quad \deg t < \deg f$$

を満たす $s(x), t(x) \in \mathbb{Q}[x]$ を求めよ．計算過程も示すこと．ただし， $\deg f$ は f の次数を表し，$d(x)$ はモニックとする．

(2) α を方程式 $f(x) = 0$ の解とするとき，$g(\alpha)$ の乗法の逆元を

$$A\alpha^3 + B\alpha^2 + C\alpha + D$$

の形に表せ．ただし A, B, C, D は有理数とする．

(J) δ を $0 < \delta < 1$ である実数とし，$I = [-\delta, 1]$ とおく．正の整数 n に対して，関数 $u_n \colon I \to \mathbb{R}$ および 実数 a_n は次を満たしているものとする．

$$\begin{aligned}
&-u_n''(x) = 2 \quad (-\delta < x < 1), \\
&u_n(-\delta) = a_n, \quad u_n(1) = 0, \\
&a_{n+1} = u_n(\delta), \quad a_1 = 0.
\end{aligned}$$

以下の問いに答えよ．

(1) $u_1(x)$ を求めよ．

(2) $u_n(x)$ を a_n を用いて表せ．

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

(4) $x \in I$ に対して，$\lim_{n\to\infty} u_n(x)$ を求めよ．