令和４年度

筑波大学大学院 入学試験

理工情報生命学術院 数理物質科学研究群

数学学位プログラム 試験問題

専門科目

注意事項

1. 問題冊子はこの表紙を入れて８枚からなる．試験開始の合図があるまでは問題冊子を開けないこと．

2. 問題は [1],[2],[3],[4],[5],[6] の６題ある．そのうち３題選択し解答せよ．ただし，
[3] を選択する場合には (A), (B) のいずれか一つに答えよ．両方を選ぶことはできない．
[4] を選択する場合には (C), (D) のいずれか一つに答えよ．両方を選ぶことはできない．
[6] を選択する場合には (G), (H), (I), (J) のいずれか一つに答えよ．二つ以上を選ぶことはできない．

3. 答案冊子は答案用紙３枚からなる．それぞれの答案用紙に，学術院名・研究群名・学位プログラム名・受験番号を記入すること．解答は答案用紙１枚につき１題とし，それぞれの答案用紙の左上に解答する問題番号を記入せよ．また，[3], [4], [5], [6] では (A), (B), (C), (D), (E), (F), (G), (H), (I), (J) の記号も記入せよ．おもて面だけで書ききれない場合には,「ウラへ」と明記して裏面を使用してよい．

4. 下書用紙は３枚ある．それぞれの下書用紙に，学術院名・研究群名・学位プログラム名・受験番号を記入すること．

5. 問題冊子も下書用紙も回収する．

数学

注意　$\mathbb{C}$ は複素数全体，$\mathbb{R}$ は実数全体，$\mathbb{Q}$ は有理数全体，$\mathbb{Z}$ は整数全体，$\mathbb{N}$ は自然数全体のなす集合を，それぞれ表すものとする．

[1] 以下に答えよ．

(1) 実数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対して $\lim_{n\to\infty}|a_{n+1}-a_n|=0$ ならば極限値 $\lim_{n\to\infty}a_n$ が存在すると言えるか．理由をつけて答えよ．

(2) $\mathbb{R}$ 上定義された連続関数 f に対して $\lim_{a\to 0}\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{-a}^{a}f(t)dt=f(0)$ を示せ．

(3) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x>0,y>0\}$ の中で $y=x^2$, $y=2x^2$, $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$ の 4 つの曲線で囲まれた領域を D とする．

(a) $u=\dfrac{x^2}{y}$, $v=\dfrac{y^2}{x}$ とするとき，$\det\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}$ を求めよ．

(b) D の面積を求めよ．

(4) $\mathbb{R}^2$ 上定義された関数 $F(x,y)=1+x\sin x+y\cos y-e^{xy}$ に対し，$x=0$ を含む開区間 I と I で定義された C^3-級の関数 φ で

$$F(x,\varphi(x))=0\ (x\in I),\quad \varphi(0)=0$$

をみたすものが存在することを，陰関数定理を用いて示せ．またこの φ に対して

$$\varphi(x)=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+o(x^3),\quad x\to 0$$

を満たす a_1,a_2,a_3 を求めよ．ここで，o はランダウの記号である．

$\boxed{\text{数学}}$

[**2**] 実行列

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

に対し，V を

$$V = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \mid D\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$

で与えられる $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ の部分ベクトル空間とする．実行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

と，$\mathbb{R}^4$ の元

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を考える．次の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ は V の元であることを示せ．

(2) $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ は V の基底であることを示せ．

(3) $\mathbb{R}^4$ の線形変換 $L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ を，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4$ に対し $L_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定める．$L_A(\boldsymbol{u}_1), L_A(\boldsymbol{u}_2)$ を求めよ．また，$L_A(V) \subset V$ が成立することを示せ．

(4) V の線形変換 $\varphi : V \to V$ を，$\boldsymbol{v} \in V$ に対し $\varphi(\boldsymbol{v}) = L_A(\boldsymbol{v})$ で定める．基底 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ に関する φ の表現行列 B を求めよ．

(5) 次の条件を満たす V の基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ は存在するか？理由をつけて答えよ．

（条件）基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ に関する φ の表現行列は，対角行列である．

数学

[3] 次の **(A), (B)** のうち **1 つ**を選び解答せよ．

(A) $\mathbb{F}_3 = \{0,1,2\}$ を 3 元体とし，$\mathbb{F}_3[x]$ を $\mathbb{F}_3$ 上の 1 変数多項式環とする．$c \in \mathbb{F}_3$, $f_c(x) = x^2 + x + c \in \mathbb{F}_3[x]$, $A_c = \mathbb{F}_3[x]/(f_c(x))$ とする．次の問いに答えよ．

(1) A_c の $\mathbb{F}_3$ 上のベクトル空間としての次元を求めよ．

(2) $c = 1$ のとき，$y \neq 0$, $y^2 = 0$ を満たす $y \in A_c$ が存在することを示せ．

(3) $c = 2$ のとき，A_c は体であることを示せ．

(4) $c = 0$ のとき，A_c は環として $\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3$ に同型であることを示せ．

(B) 単位元を持つ可換環 R に対して，$R^\times$ で R の単元 (乗法に関する逆元を持つ元) 全体の集合を表す．また，

$$GL_2(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a,b,c,d \in R, ad - bc \in R^\times \right\}$$

とおくと，$GL_2(R)$ は通常の行列の積によって群になる．以下の問いに答えよ．

(1) 剰余環 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ について, $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^\times$ の元をすべて求めよ．

(2) 環準同型 $\varphi : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ がただ 1 つ存在することを示せ．

(3) (2) の環準同型 φ と $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ に対して，

$$\Phi(A) = \begin{pmatrix} \varphi(a) & \varphi(b) \\ \varphi(c) & \varphi(d) \end{pmatrix}$$

と定める．$\Phi(A) \in GL_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ であることを示せ．また，

$$\Phi : GL_2(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \to GL_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}), \quad A \mapsto \Phi(A)$$

が全射な群準同型であることを示せ.

(4) $GL_2(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ が有限群であることを示し，その位数 (サイズ) を求めよ．

数学

[4] 次の **(C), (D)** のうち１つを選び 解答せよ.

(C) $\mathbb{R}^n$ の点 p と正の実数 r に対して, C^∞ 級写像 $\varphi\colon \mathbb{R}^n \setminus \{p\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{p\}$ を

$$\varphi(x) = p + \frac{r^2}{\|x-p\|^2}\,(x-p)$$

で定める. ただし $\|\cdot\|$ はユークリッドノルムである. また C^∞ 級関数 $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{p\} \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \|\varphi(x) - x\|^2$$

で定める. このとき以下の問いに答えよ.

(1) $\mathbb{R}^n \setminus \{p\}$ の点 x に対して, $(\varphi \circ \varphi)(x)$ を求めよ.

(2) φ は C^∞ 級微分同相写像であることを示せ.

(3) $\mathbb{R}^n \setminus \{p\}$ の点 x における f の勾配ベクトル $(\nabla f)(x)$ を，p と r および x を用いて表せ.

(4) f の臨界点全体からなる集合 C_f を，p と r を用いて表せ.

(D) X をハウスドルフ空間とし, $r : X \to X$ を $r \circ r = r$ を満たす連続写像とする.

(1) r の固定点集合 $\{x \in X \mid r(x) = x\}$ は $r(X)$ に等しいことを示せ.

(2) $r(X)$ は X の閉集合であることを示せ.

(3) X が可縮ならば, $r(X)$ も可縮であることを示せ. ただし，位相空間 Y が次の条件を満たすとき，Y は可縮であるという.

（条件）連続写像 $H : Y \times [0,1] \to Y$ と Y の点 a が存在して, 任意の $y \in Y$ に対して $H(y,0) = y$, $H(y,1) = a$ が成り立つ.

(4) ユークリッド平面 $\mathbb{R}^2$ の部分空間

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

上の連続写像 $r : D \to D$ で $r \circ r = r$ かつ $r(D) = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ を満たすものは存在しないことを示せ.

数学

[5] 次の **(E)**, **(F)** の両方に解答せよ.

(E) $0 < a < 1$ とし, $\mathbb{C}$ 上の関数 f を

$$f(z) = \frac{e^{az}}{1 + e^z}$$

と定義する. $R > 0$ に対して

$$D_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Re}\, z| < R,\ 0 < \mathrm{Im}\, z < 2\pi\}$$

とする. また, D_R の境界に反時計まわりに向きをつけた曲線を C_R とする.

(1) D_R に含まれる f の極を求め, そこでの留数を計算せよ.

(2) 複素積分 $\displaystyle\int_{C_R} f(z)\, dz$ を考えることにより,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x}\, dx = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}$$

であることを示せ.

(F) n を正の整数とし, $(0, \infty)$ 上の関数 f_n を

$$f_n(x) = \frac{1 + x^n}{1 + x^{n+2}}\, x^{-\frac{1}{n+1}}$$

と定義する.

(1) 次を示せ.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & (0 < x \le 1 \text{ のとき}), \\ x^{-2} & (x > 1 \text{ のとき}). \end{cases}$$

(2) 極限値

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} f_n(x)\, dx$$

を求めよ.

数学

[**6**] 次の **(G), (H), (I), (J)** のうち 1 つを選び 解答せよ.

(G) $(X,<)$ を全順序集合とし，X^2 上の全順序 $<^*$ を

$$(x_1,y_1) <^* (x_2,y_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2 \vee (x_1 = x_2 \wedge y_1 < y_2)$$

で定める.

(1) 全順序集合 $(X,<)$ が稠密ならば，$(X^2,<^*)$ も稠密であることを示せ.

(2) $(X,<)$ が整列集合ならば，$(X^2,<^*)$ も整列集合であることを示せ.

(3) $(X,<)$ を 2 個以上の元をもつ整列集合とする．このとき，$(X,<)$ と $(X^2,<^*)$ は順序同型でないことを示せ.

(4) $<$ を $\mathbb{R}$ 上の自然な順序とする．$(\mathbb{R},<)$ と $(\mathbb{R}^2,<^*)$ が順序同型であるかを判定し，その理由を述べよ.

(H) 確率変数 $X_1,...,X_n$ $(n \geq 2)$ は互いに独立に，いずれも次の確率量関数 $f(x,\theta)$ をもつ分布に従うとする.

$$f(x,\theta) = \begin{cases} \dfrac{\theta^{x/2}\exp(-\theta^{1/2})}{x!} & (x = 0,1,2,...), \\ 0 & (\text{その他}). \end{cases}$$

ただし，θ は正の実数とする.

(1) $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ とおく．Y の積率母関数を求めよ.

(2) ある定数 c_1 と c_2 を用いて，$\hat{\theta}_1 = c_1(Y^2 - Y)$，$\hat{\theta}_2 = c_2\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - X_i)$ とおく．そのとき，$\hat{\theta}_1$ と $\hat{\theta}_2$ がそれぞれ θ の不偏推定量となるように c_1 と c_2 を定めよ.

(3) (2) で定めた c_1 と c_2 に対して，$\hat{\theta}_1$ と $\hat{\theta}_2$ の分散をそれぞれ求めよ．また，θ の推定量としてそれらの良さを比較せよ.

数学

(I) F を体，r を 2 以上の整数とする．$n_1,\dots,n_r$ を相異なる F の元とし，$a_1,\dots,a_r \in F$ とする．$i=1,\dots,r$ に対して

$$f(x) \equiv a_i \pmod{x-n_i} \quad \text{かつ} \quad \deg f < r \qquad (*)$$

を満たす $f(x) \in F[x]$ を求めたい．

(1) $i=1,\dots,r$ に対し，$l_i(x) \in F[x]$ で

$$\begin{aligned} l_i(x) &\equiv 1 \pmod{x-n_i}, \\ l_i(x) &\equiv 0 \pmod{x-n_j} \quad (1 \le j \le r,\ j \ne i) \end{aligned}$$

かつ $\deg l_i < r$ を満たすものが存在することを示せ．

(2) (1) の条件を満たす $l_i(x)$ $(i=1,\dots,r)$ を用いて，条件 $(*)$ を満たす $f(x)$ を 1 つ求めよ．

(3) $F=\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ の場合に，上の手順に従い

$$\begin{aligned} f(x) &\equiv 1 \pmod{x}, \\ f(x) &\equiv 4 \pmod{x-1}, \\ f(x) &\equiv 4 \pmod{x-2} \end{aligned}$$

かつ $\deg f < 3$ を満たす $f(x) \in F[x]$ を 1 つ求めよ．

(J) N を正の整数とする．$h=1/N$ とおく．次の漸化式により定義される数列 (u_n) を考える．

$$\frac{u_{n+1}-u_n}{h} = u_n \quad (n \ge 0), \quad u_0 = 1.$$

$E_n = e^{hn} - u_n$ とおく．以下の問いに答えよ．

(1) 任意の正の実数 x に対して，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$1+x < e^x < 1+x+\frac{1}{2}x^2e^x$$

(2) 任意の非負整数 n に対し，$E_n \ge 0$ が成り立つことを示せ．

(3) h に依存しない正の定数 C_1 が存在し，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$E_{n+1} \le (1+h)E_n + C_1h^2 \quad (0 \le n \le N-1)$$

(4) h に依存しない正の定数 C_2 が存在し，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$E_n \le C_2 h \quad (0 \le n \le N)$$