解析分野紹介

福島竜輝

筑波大学 数理物質系 数学域

2021 年 4 月

数学の大きな分類（筑波大学における分野）

代数学： 代数系 (二項演算を持つ集合) についての研究.
幾何学： 空間の形状の分類についての研究.
解析学： 微積分と関数の性質についての研究.
情報数学： 統計、論理、計算機について応用も含む研究.

数学と言えば “方程式” なので,

微分方程式

を１つのキーワードに解析学内の細分を概観してみることにする.

解析系教員の分野別構成

筑波大学の解析系は更に大きく3グループに細分される：

代数解析学： 解析の問題を代数的手法・観点から研究
(常微分方程式など)
竹山教授，桑原准教授

偏微分方程式論： 関数解析，幾何解析的な立場から研究
(種々の偏微分方程式)
筧教授，木下准教授，竹内助教

確率論： 確率現象の数理モデルを研究
(確率微分方程式など)
濱名教授，福島准教授，松浦助教

※ 数学における解析学内の細分にはこれら以外の分野もある.

代数解析学 (解析の問題を代数的観点から研究)

常微分方程式は弱い条件の下でも大体一意的に解ける！
$\longrightarrow$ より強い仮定の下でより詳しく具体的な解析をする．

強い仮定 ≒ 解析性（Taylor 級数表示可能性 (正則性）),

係数などに規則性・対称性などが現れ，代数的な手法が有効になってくる．

例）超幾何微分方程式：$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ として

$$x(1-x)y'' + \big[\gamma - (\alpha+\beta+1)x\big]y' - \alpha\beta y = 0$$

を考える．級数解 $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ を仮定して，上式に代入すると係数比較により解が得られて，

$$y(x) = {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+n)} \frac{x^n}{n!}.$$

超幾何関数は様々な初等関数，特殊関数を含んでいる：

$$(1-x)^\nu = {}_2F_1(-\nu,\beta;\beta;x),$$

$$\log(1+x) = x\cdot{}_2F_1(1,1;2;-x),\quad \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} = x\cdot{}_2F_1\left(\frac{1}{2},1;\frac{3}{2};x^2\right),$$

$$\sin^{-1}x = x\cdot{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{3}{2};x^2\right),\qquad \tan^{-1}x = x\cdot{}_2F_1\left(\frac{1}{2},1;\frac{3}{2};-x^2\right).$$

その他に変換公式，積分表示などがある．更には，

一般化超幾何関数：$(\alpha)_0=1$, $(\alpha)_n=\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}$ として，

$$ {}_pF_q(\alpha_1,\ldots,\alpha_p;\beta_1,\ldots,\beta_q;x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_n\cdots(\alpha_p)_n}{(\beta_1)_n\cdots(\beta_q)_n}\frac{x^n}{n!},$$

... など．

その他のキーワード：特異点理論への応用，超局所解析，量子可積分系（KZ 方程式 etc.）に関連する表現論，差分方程式，組み合わせ論，特殊関数．

偏微分方程式論

常微分方程式が一般に比較的弱い条件下で解けるのに対し，偏微分方程式は一般に解けるとは限らない.

例）Lewy の方程式： $f \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ は原点で解析的ではないとする. このとき $0 \in \mathbb{R}^3$ の任意の近傍 $U \subset \mathbb{R}^3$ に対し，次を満たす $u \in C^1(U)$ は存在しない：

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y} - 2i(x+iy)\frac{\partial u}{\partial z} = f'(z).$$

（注．解析性は C^∞ 級よりも強い性質である）

$\Longrightarrow$ まず代表的な解ける型を指定する（物理的な重要性も加味）. いかなる摂動に対して一意可解性や型の特性が成り立つかを解析. 時間発展する方程式を考察する場合，初期値として与える関数に滑らかさの条件を課して初期値問題の適切性を研究する.

Schrödinger 方程式（量子力学の線形方程式）

$$i\frac{\partial u}{\partial t} = (-\triangle + V)u.$$

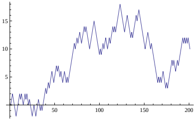
双曲型方程式（波動現象に関する線形方程式）

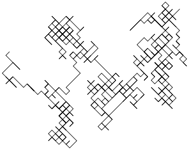
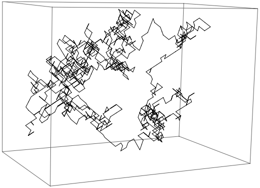
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \triangle u.$$

その他のキーワード：対称空間上の微分方程式，積分幾何，ウェーブレット，画像解析，波動方程式.

確率論(確率現象の数理モデル)

測度論に確率的な解釈を組み入れた,(微分よりは)積分に基礎を置く解析学.
例)ランダムウォーク:格子点上を単位時間毎に等確率で隣の点に移動.



1, 2 次元…再帰的(確率 1 で出発点に戻る).
3 次元以上…非再帰的.

確率微分方程式： X_t を未知の確率過程，B_t を Brown 運動として，

$$\mathrm{d}X_t = \mu(X_t, t)\,\mathrm{d}t + \sigma(X_t, t)\,\mathrm{d}B_t.$$

Brown 運動は実は微分不可能なので dB_t には普通には意味がつかないが，確率解析の理論によって意味がつく．その結果，上の方程式が実は常微分方程式より弱い条件の下で解けたり，その解である確率過程 X_t を使って偏微分方程式の解が表現できたりする．

その他のキーワード：極限定理，大偏差原理，マルコフ過程．

過去3年の解析分野の修士論文タイトル

- 代数解析分野
  - パス・グラフの積の原点におけるスペクトル分布について
- 偏微分方程式分野
  - Hardy 空間 $H^2(\mathbb{R})$ 上のウェーブレットの構成とその性質
  - Shearlet 変換の一般化
  - トーラス上の重み付き L2 空間上での固有値問題について
  - 発進確率を考慮した交通流モデルに関するシミュレーションとその解析
  - 時間遅れをもつ Burgers 方程式と渋滞学への応用
  - 非整数階リッジレット変換
  - 近似パラメータを含む流体方程式の数学解析
  - 三角多項式を用いた滑らかな Riesz 基底の正規直交化について
- 確率分野
  - 確率微分方程式に基づく新たなアフィンイールド型金利モデルの考察
  - ベッセル過程の到達時刻の密度関数について