

# 幾何学分野紹介

筑波大学数理物質系数域幾何学分野

永野 幸一

筑波大学数理物質系数域

筑波大学大学院数学学位プログラム

オープンキャンパス

2021年4月29日

# 幾何学とは

幾何学 図形や空間の性質を研究する数学の分野

幾何学の魅力 直感的把握力+論理的思考力による理解

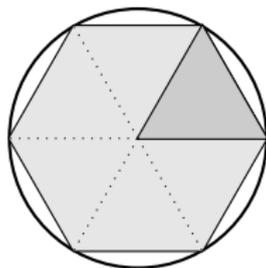
例題 (高等学校の数学)

単位円に内接する正  $n$  角形が囲む領域の面積  $S_n$  を求めよ.

略解

領域を合同な  $n$  個の二等辺三角形が囲む領域に分割すると

$$S_n = n \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin \frac{2\pi}{n} \right) = \frac{n}{2} \sin \frac{2\pi}{n}.$$



# 現代の幾何学

## 大学学部数学科 4年間で学ぶ標準的な内容

### 位相幾何学 (Topology)

**対象** 単体的複体・多面体, より一般の位相空間

**観点** 連続写像, ホモトピー同値性や同相性などに注目

**概念** オイラー標数, ホモロジー群, 基本群など

### 微分幾何学 (Differential Geometry)

**対象** 曲線や曲面, 微分可能多様体

**観点** 微分可能写像, 微分同相性や計量同型性などに注目

**概念** 計量, 弧長・面積・体積, ガウス曲率, 平均曲率など

# 位相幾何学と微分幾何学の関わり

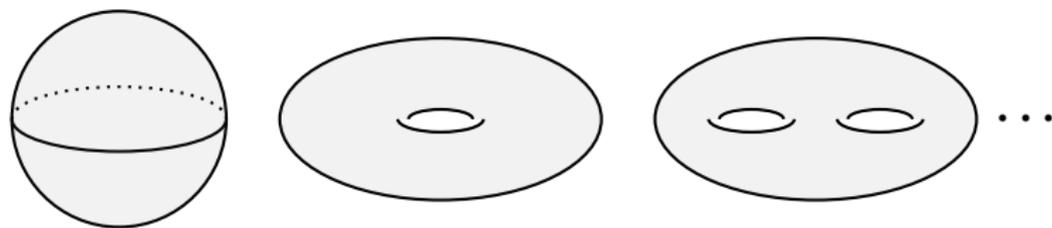
ガウス・ボンネの定理 (19世紀)

閉曲面  $M$  に対して、次の等式が成り立つ。

$$\frac{1}{2\pi} \int_M K d\mu = \chi(M).$$

ここで、 $K$  は  $M$  上のガウス曲率、 $d\mu$  は  $M$  上の面積測度、 $\chi(M)$  は  $M$  のオイラー標数である。

微分幾何学的量 = 位相幾何学的量



# 球面：位相幾何学の視点

3次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^3$  内の半径  $r$  の標準球面  $S^2(r)$  は

$$S^2(r) := \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \}$$

で定まり、閉曲面である。このとき、以下が成り立つ。

- ▶ 球面  $S^2(r)$  は単連結である。
- ▶ 球面  $S^2(r)$  のオイラー標数  $\chi(S^2(r))$  は2に等しい。

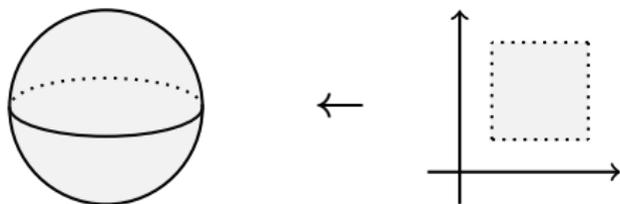
$$\chi(M) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \text{rank } H_k(M)$$



## 球面：微分幾何学の視点

- ▶ 球面  $S^2(r)$  の表面積  $\mu(S^2(r))$  は  $4\pi r^2$  に等しい.
- ▶ 球面  $S^2(r)$  上のガウス曲率  $K$  は定数関数  $1/r^2$  である.

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$



ガウス・ボンネの定理を球面  $S^2(r)$  に対して確かめよう.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{S^2(r)} K d\mu &= \frac{1}{2\pi} \int_{S^2(r)} \frac{1}{r^2} d\mu = \frac{1}{2\pi r^2} \int_{S^2(r)} d\mu \\ &= \frac{1}{2\pi r^2} \cdot \mu(S^2(r)) = 2 = \chi(S^2(r)). \end{aligned}$$

# 幾何学分野の教員と研究内容（その1）

2021年4月1日現在

## 位相幾何学

- 川村 一宏 教授
  - ▶ 幾何学的トポロジー・距離の幾何学・位相幾何学的  
組み合わせ論
- 石井 敦 准教授
  - ▶ 低次元トポロジー，結び目理論
- 丹下 基生 准教授
  - ▶ 低次元位相幾何（3, 4次元多様体論）
- 平山 至大 准教授
  - ▶ 力学系理論，エルゴード理論

# 幾何学分野の教員と研究内容（その2）

## 微分幾何学

- 井ノ口 順一 教授
  - ▶ 無限可積分系, 差分幾何
- 小野 肇 教授
  - ▶ 微分幾何学, 特にリーマン計量と存在問題, ケーラー多様体, 佐々木多様体など
- 田崎 博之 准教授
  - ▶ 等質空間の微分幾何学と積分幾何学
- 山本 光 准教授
  - ▶ 微分幾何学, 特に特殊幾何学と幾何学的フロー
- 相山 玲子 講師
  - ▶ 曲面および部分多様体の微分幾何的研究
- 永野 幸一 講師
  - ▶ 大域リーマン幾何学および距離空間の幾何学

# 幾何学分野の活動

## 幾何学分野の教育活動

- 講義
  - ▶ 幾何学概論 I (位相幾何学), 同 II (微分幾何学)
  - ▶ 幾何学 I (位相幾何学), 同 II (微分幾何学)
- セミナー
  - ▶ 幾何学特別研究 I, 同 II (前期課程)
  - ▶ 幾何学特別研究 III, 同 IV, 同 V (後期課程)

## 幾何学分野の研究セミナー

- ▶ 筑波大学トポロジーセミナー
- ▶ 筑波大学微分幾何学セミナー
- ▶ その他, 教員個人が開催する研究集会など

# 位相幾何学と微分幾何学の最近の関わり

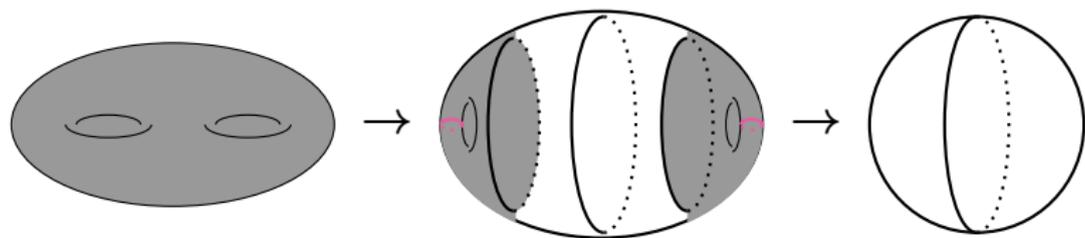
ポアンカレ予想 (1904 年)

単連結な 3 次元閉多様体は、3 次元球面に同相である。

ペレルマンによるポアンカレ予想の解決 (2002, 2003 年)

- ▶ 大域リーマン幾何学のアイデアに基づく巧妙な戦略
- ▶ ハミルトンを祖とするリッチ流の幾何解析の新展開
- ▶ リーマン多様体の収束理論を 3 次元多様体論に応用
- ▶ サーストンの幾何化予想に対する長大な証明を完成

位相幾何学の難問が現代の微分幾何学の手法を用いて解決



# 進学希望者へのワンポイントアドバイス

- ▶ 位相幾何学の分野で研究するためには

「集合および位相の基本事項」

を学んでいることが望ましい。

- ▶ 微分幾何学の分野で研究するためには

「曲線と曲面の幾何」および「多様体の基礎」

を学んでいることが望ましい。

- ▶ どちらの分野で研究するにせよ、

「微分積分学」および「線形代数学」

を学んでいることが望ましい。

志望する指導教員に連絡を取り進学についてご相談ください

むすびに

ご清聴ありがとうございました

図形や空間の性質に興味のあるみなさん、  
筑波大学大学院数学学位プログラムで、  
幾何学の研究を本格的に始めてみませんか。