令和３年度

筑波大学大学院 入学試験

理工情報生命学術院　数理物質科学研究群

数学学位プログラム 試験問題

専門科目

注意事項

1.　問題冊子はこの表紙を入れて８枚からなる．試験開始の合図があるまでは問題冊子を開けないこと．

2.　問題は専門基礎課題が３題 ([1],[2],[3]) と専門課題が４題 ([4],[5],[6],[7]) の合計７題ある．そのうち４題選択し解答せよ．ただし，
[4] を選択する場合には (A), (B) のいずれか一つに答えよ．両方を選ぶことはできない．
[5] を選択する場合には (C), (D) のいずれか一つに答えよ．両方を選ぶことはできない．
[7] を選択する場合には (G), (H), (I) のいずれか一つに答えよ．二つ以上を選ぶことはできない．

3.　答案冊子は答案用紙４枚からなる．それぞれの答案用紙に，学術院名・研究群名・学位プログラム名・受験番号を記入すること．解答は答案用紙１枚につき１題とし，それぞれの答案用紙の左上に解答する問題番号を記入せよ．また，[4], [5], [6], [7] では (A), (B), (C), (D), (E), (F), (G), (H), (I) の記号も記入せよ．おもて面だけで書ききれない場合には,「ウラへ」と明記して裏面を使用してよい．

4.　下書用紙は４枚ある．それぞれの下書用紙に，学術院名・研究群名・学位プログラム名・受験番号を記入すること．

5.　問題冊子も下書用紙も回収する．

$\boxed{\text{数学}}$

注意 $\mathbb{C}$ は複素数全体，$\mathbb{R}$ は実数全体，$\mathbb{Q}$ は有理数全体, $\mathbb{Z}$ は整数全体, $\mathbb{N}$ は自然数全体のなす集合を, それぞれ表すものとする.

[1] f を $\mathbb{R}$ 上の実数値連続関数とする.

(1) $y, z \in \mathbb{R}$ に対して

$$U(y,z) = \int_0^y f(t)\sin(z-t)\,dt$$

と定める．すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x,x) + \frac{\partial U}{\partial z}(x,x) = \int_0^x f(t)\cos(x-t)\,dt$$

が成り立つことを示せ.

(2) $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$u(x) = \int_0^x f(t)\sin(x-t)\,dt$$

と定める．すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$u''(x) + u(x) = f(x)$$

が成り立つことを示せ.

$\boxed{\text{数学}}$

[2] a, b を実数とする．3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & a & b \end{pmatrix}$$

と，A の定める線形変換 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ を考える．A の階数が 2 であるとき，以下の問いに答えよ．

(1) b を a で表せ．

(2) f の核 $\operatorname{Ker} f$ の基底を 1 組求めよ．

(3) f の像 $\operatorname{Im} f$ について，$\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Im} f$ が成り立つとき，a と b の値を求めよ．

[3] 集合 A のベキ集合（A のすべての部分集合から成る集合）を $P(A)$ で表す．写像 $f : P(A) \to P(A)$ は，次の条件を満たすとする．

すべての $X, Y \in P(A)$ に対して，$X \subset Y$ ならば $f(X) \subset f(Y)$ である．

$P(A)$ の部分集合 $\mathcal{R}$ を

$$\mathcal{R} = \{X \in P(A) \mid f(X) \subset X\}$$

と定める．

(1) $\mathcal{R} \neq \emptyset$ を示せ．

(2) $X \in \mathcal{R}$ ならば $f(X) \in \mathcal{R}$ であることを示せ．

(3) $B = \displaystyle\bigcap_{X \in \mathcal{R}} X$ とする． このとき，すべての $X \in \mathcal{R}$ に対して $B \subset f(X)$ が成り立つことを示せ．

(4) (3) の B について，$f(B) = B$ を示せ．

$\boxed{\text{数学}}$

[4] 次の **(A), (B)** のうち **1 つ**を選び解答せよ．

(A) 以下の問いに答えよ．

(1) $\mathbb{C}[x]$ を $\mathbb{C}$ に係数を持つ多項式環とする．$\mathbb{C}[x]$ が整域であることを示せ．

(2) $\mathbb{C}[x]$ が単項イデアル整域であることを示せ．

(3) $\mathbb{C}[x, y]$ を $\mathbb{C}$ に係数を持つ 2 変数の多項式環とする．$\mathbb{C}[x, y]$ が単項イデアル整域でないことを示せ．

(4) I を $xy - 1$ で生成される $\mathbb{C}[x, y]$ のイデアルとする．剰余環 $R = \mathbb{C}[x, y]/I$ が単項イデアル整域かどうかを判定し，その理由を述べよ．

(B) 以下の問いに答えよ．

(1) $\mathbb{Z}^2 = \{(m, n) \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ を通常の加法で加法群とみなす．任意の $a \in \mathbb{Z}$ に対して

$$f((1, 2)) = (2, 3), \qquad f((2, 5)) = (5, a)$$

を満たす群の準同型 $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ が一意的に存在することを示せ．また，この準同型 f が同型となるような $a \in \mathbb{Z}$ をすべて求めよ．

(2) 加法群 $\mathbb{Z}^2$ における指数 2 の部分群をすべて求めよ．

(3) q を素数とし，剰余群 $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ の単位元を 0 で表す．また，G を群とし，$\varphi : G \to \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ を群の準同型とする．G の元 x の位数が q と異なる素数 p であるとき，$\varphi(x) = 0$ であることを示せ．

(4) n を 2 以上の整数とし，S_n を n 次対称群とする．$\varphi : S_n \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ を群の準同型とするとき，任意の $\sigma \in S_n$ に対して $\varphi(\sigma) = 0$ であることを示せ．

$\boxed{\text{数学}}$

[5] 次の **(C)**, **(D)** のうち 1 つを選び 解答せよ.

(C) $\mathbb{R}^3$ の元 x, y に対して，x の標準ノルムを $\|x\|$ とし，x と y の標準内積を $\langle x, y\rangle$ で表す．C^∞ 級写像 $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を

$$f(x, y) = \left(\|x\|^2, \|y\|^2, \langle x, y\rangle\right)$$

で定める.

(1) $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ の各点における f の微分写像の階数を求めよ.

(2) $M = f^{-1}(1, 1, 0)$ は $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ の 3 次元部分多様体であることを示せ.

(3) M 上の C^∞ 級関数 φ を

$$\varphi(x, y) = x_1 + y_1, \quad x = (x_1, x_2, x_3),\ y = (y_1, y_2, y_3)$$

で定める．M の点 $\left((\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}), (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2})\right)$ は φ の臨界点であることを示せ.

(D) 位相空間 $(X, \mathcal{U})$ からハウスドルフ空間 Y への連続写像 $f : X \to Y$ に対し

$$x \sim y \iff f(x) = f(y)$$

により X 上に同値関係 $\sim$ を定める．商集合 $X/{\sim}$ に対して，$p : X \to X/{\sim}$ を自然な射影とし，

$$\mathcal{Q} = \left\{A \subset X/{\sim} \;\middle|\; p^{-1}(A) \in \mathcal{U}\right\}$$

とおく.

(1) $\mathcal{Q}$ は $X/{\sim}$ の位相であることを示せ.

(2) $(X/{\sim}, \mathcal{Q})$ はハウスドルフ空間であることを示せ.

(3) $(X, \mathcal{U})$ がコンパクト空間ならば，$p : (X, \mathcal{U}) \to (X/{\sim}, \mathcal{Q})$ は閉写像であることを示せ.

$\boxed{\text{数学}}$

[**6**] 次の **(E)**, **(F)** の両方に解答せよ．

(E) $\mathbb{C}$ 上の有理型関数 $f(z) = \dfrac{z^2}{z^4+1}$ を考える．$R>1$ に対して，半円領域

$$A_R = \{z = re^{i\theta} \,|\, 0 \leq r \leq R,\ 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

の境界に反時計まわりに向きをつけた曲線を C_R とする．

(1) A_R の内部に含まれる f の極をすべて求め，そこでの留数を求めよ．

(2) 積分 $\displaystyle\int_{C_R} f(z)dz$ を考えることにより，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\,dx$$

を求めよ．

(F) E を $\mathbb{R}$ 内のルベーグ可測集合，ϕ を E 上の非負ルベーグ可積分関数とするとき，

$$\lim_{n\to\infty} n\int_E \log\left\{1 + \frac{\phi(x)}{n}\right\} dx = \int_E \phi(x)\,dx$$

となることを示せ．

$\boxed{\text{数学}}$

[7] 次の (G), (H), (I) のうち１つを選び 解答せよ．

(G) $D = \{(l,m) \in \mathbb{N}^2 \mid l < m\}$ とおく．写像 $f : D \to \mathbb{N}$ が, 条件

$$\text{すべての } (l,m) \in D \text{ に対して } f(l,m) \le l$$

を満たすとき，以下の主張を示せ．ただし，$\mathbb{N}$ の空でない部分集合 A に対し，$\min A$ は A に含まれる最小の自然数を表す．

(1) X を $\mathbb{N}$ の無限部分集合とする．このとき，$X \setminus \{\min X\}$ の無限部分集合 Y と $i \in \mathbb{N}$ が存在して，すべての $n \in Y$ に対して $f(\min X, n) = i$ が成り立つ．

(2) 次の 2 条件を満たす $\mathbb{N}$ の無限部分集合の減少列 $X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset \cdots$ が存在する．

(a) $\min X_0 < \min X_1 < \min X_2 < \cdots$.

(b) 任意の $k \in \mathbb{N}$ と X_{k+1} の任意の2元 $m < n$ に対して $f(\min X_k, m) = f(\min X_k, n)$ が成り立つ．

(3) $\mathbb{N}$ の無限部分集合 H が存在して，H の任意の 3 元 $l < m < n$ に対して $f(l,m) = f(l,n)$ が成り立つ．

(H) 確率変数 X は次の確率密度関数

$$f(x,\theta) = \begin{cases} \dfrac{(3\theta)^3}{2x^4} \exp\left(-\dfrac{3\theta}{x}\right) & (x > 0), \\ 0 & (x \le 0) \end{cases}$$

をもつとし，この分布から無作為標本 $X_1, \ldots, X_n$ を抽出したとする．ただし，$\theta > 0$ とする．

(1) X の平均 $E_\theta(X)$ を求めよ．

(2) $X_1, \ldots, X_n$ を用いて，θ の不偏推定量 $\widehat{\theta}_n$ を 1 つ与え，その分散 $\mathrm{Var}_\theta(\widehat{\theta}_n)$ を求めよ．

(3) $X_1, \ldots, X_n$ のもつ θ に関するフィッシャー情報量 $I_n(\theta)$ を求め，(2) で与えた $\widehat{\theta}_n$ の θ における効率 $(I_n(\theta)\mathrm{Var}_\theta(\widehat{\theta}_n))^{-1}$ を求めよ．

数学

(I) 以下の問いに答えよ．

(1) $n_1, n_2, \ldots, n_r$ を対ごとに互いに素な正の整数とし，$a_1, a_2, \ldots, a_r$ を任意の整数とする．連立合同方程式

$$x \equiv a_i \pmod{n_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, r) \tag{$*$}$$

の整数解 x を求める手順を示し，その手順で求めた x が $(*)$ を満たすことを示せ．

(2) 連立合同方程式

$$13x \equiv 21 \pmod{37}, \quad 7x \equiv 20 \pmod{47}$$

の各式を

$$x \equiv a_1 \pmod{37}, \quad x \equiv a_2 \pmod{47}$$

の形に変形せよ．

(3) (2) の連立合同方程式の正の整数解の中で最小のものを求めよ．