# 令和２年度

# 筑波大学大学院 数理物質科学研究科 入学試験

## 数学専攻 試験問題

# 専門科目

注意事項

1. 問題冊子はこの表紙を入れて８枚からなる．試験開始の合図があるまでは問題冊子を開けないこと．

2. 問題は専門基礎課題が３題 ([1],[2],[3]) と専門課題が４題 ([4],[5],[6],[7]) の合計７題ある．そのうち４題選択し解答せよ．ただし，
[4] を選択する場合には (A), (B) のいずれか一つに答えよ．両方を選ぶことはできない．
[5] を選択する場合には (C), (D) のいずれか一つに答えよ．両方を選ぶことはできない．
[7] を選択する場合には (G), (H), (I) のいずれか一つに答えよ．二つ以上を選ぶことはできない．

3. 答案冊子は答案用紙４枚からなる．それぞれの答案用紙に，研究科名・専攻名・受験番号を記入すること．解答は答案用紙１枚につき１題とし，それぞれの答案用紙の左上に解答する問題番号を記入せよ．また，[4], [5], [6], [7] では (A), (B), (C), (D), (E), (F), (G), (H), (I) の記号も記入せよ．おもて面だけで書ききれない場合には,「ウラへ」と明記して裏面を使用してよい．

4. 下書用紙は４枚ある．それぞれの下書用紙に，研究科名・専攻名・受験番号を記入すること．

5. 問題冊子も下書用紙も回収する．

# 数学

**注意**　$\mathbb{C}$ は複素数全体, $\mathbb{R}$ は実数全体, $\mathbb{Q}$ は有理数全体, $\mathbb{Z}$ は整数全体, $\mathbb{N}$ は自然数全体のなす集合を, それぞれ表すものとする.

**[1]**　以下の問いに答えよ.

(1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\log x}{x} dx$ を求めよ.

(2) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 1,\ 1 \leq x^2 y \leq 2\}$ とする. 広義積分

$$I = \iint_D \frac{\log(x^2 y)}{1 + x^2 y^2}\, dxdy$$

を計算せよ.

数学

**[2]** $a,\ b$ を実数とし, $a \neq 1$ とする. 3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 \\ b & 1 & a \end{pmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ.

(1) $A$ の階数 $\operatorname{rank} A$ を求めよ.

(2) $a \neq b$ とする. $\operatorname{rank} A = 2$ のとき, $A$ の固有値をすべて求めよ.

(3) $a \neq b$ かつ $\operatorname{rank} A = 2$ とする. $A$ が対角化できないとき, $a$ と $b$ を求めよ.

**[3]** $X, Y, Z$ を空でない集合，$f : X \to Y,\ g : Y \to Z,\ h : Z \to X$ をそれぞれ写像とする．以下の問いに答えよ.

(1) 合成写像 $g \circ f : X \to Z$ が単射ならば， $f : X \to Y$ は単射であることを示せ.

(2) $g \circ f : X \to Z$ が全射ならば， $g : Y \to Z$ は全射であることを示せ.

(3) $h \circ g \circ f : X \to X$ と $g \circ f \circ h : Z \to Z$ が全射で，$f \circ h \circ g : Y \to Y$ が単射ならば，$f : X \to Y,\ g : Y \to Z,\ h : Z \to X$ はすべて全単射であることを示せ.

$\boxed{\text{数学}}$

[4] 次の **(A), (B)** のうち **1 つ**を選び解答せよ.

（A） $\mathbb{Z}$ を通常の加法によって群とみなす. また, 2 以上の整数 $n$ について,

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{0,\,1,\,\ldots,\,n-1\}$$

を $n$ を法とする加法で群とみなす. 以下の問いに答えよ. ただし, (1), (2) は答えのみでよい. (3), (4) は理由も述べよ.

(1) $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ の部分群をすべて求めよ.

(2) (1) で求めた部分群のそれぞれについて, その生成元をすべて求めよ.

(3) 群準同型 $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ であって, 像 $\operatorname{Im} f$ の元の個数が 4 個であるものはいくつあるか.

(4) $n$ は 2 以上の整数とする. 群準同型 $g : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ であって, 像 $\operatorname{Im} g$ の元の個数が 2 個であるものはいくつあるか.

（B） $\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$ を 2 元体とし，$f(X) = X^3 + X + 1$ を $\mathbb{F}_2$ 上の多項式とする．以下の問いに答えよ．

(1) $f(X)$ は $\mathbb{F}_2$ 上の既約多項式であることを示せ．

(2) 剰余体 $K = \mathbb{F}_2[X]/(f(X))$ の元をすべて記述せよ．

(3) $K$ 上の多項式 $Y^3 + Y + 1$ を 1 次式の積に分解せよ．

数学

[5] 次の **(C), (D)** のうち **1** つを選び 解答せよ.

**(C)** $\mathbb{R}^3$ 内の曲面 $S$ を

$$S = \{(x, y, x^2 - y^2) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

によって定める.

(1) $\boldsymbol{p}(x, y) = (x, y, x^2 - y^2)$ $((x, y) \in \mathbb{R}^2)$ は $S$ のパラメータ表示になることを示せ.

(2) $\mathbb{R}^3$ の点 $(0, 1, 1)$ と点 $(x, y, z)$ の距離の二乗

$$x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2$$

を $S$ に制限した関数を $f$ で表す.

(a) $x$ 成分が $0$ ではない $f$ の臨界点をすべて求めよ.

(b) $x$ 成分が $0$ の $f$ の臨界点はただ一つ存在することを示せ. その臨界点の $y$ 成分を $y_0$ とすると $1/4 < y_0 < 1/3$ が成り立つことを示せ.

(3) (2)(a) で求めた $f$ の臨界点における, $S$ の接平面と単位法ベクトルを求めよ.

(4) (2)(a) で求めた $f$ の臨界点において, $f$ が極大値・極小値をとるかどうか判定せよ.

**(D)**

(1) 位相空間 $X$ において, 連結集合 $A$ の閉包 $\overline{A}$ も連結集合であることを示せ.

(2) ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ において, 連結集合 $A$ は弧状連結であることを示せ.

(3) $A = \{(x, \sin\frac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\} \cup \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq y \leq 1\}$ とする. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ において, $A$ は連結であるが, 弧状連結でないことを示せ.

$\boxed{\text{数学}}$

[**6**] 次の **(E)**, **(F)** の<u>両方に</u>解答せよ.

**(E)** $a$ は $2a \notin \mathbb{Z}$ を満たす複素数とする.

$$f(z) = \frac{\pi}{(z-a)^2}\frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}$$

とする.

(1) $n$ を整数とするとき, $z = n$ における $f(z)$ の留数を求めよ.

(2) $z = a$ における $f(z)$ の留数を求めよ.

(3) 正の整数 $m$ に対して

$$A_m = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |\mathrm{Re}\, z| < m + \frac{1}{2},\ |\mathrm{Im}\, z| < m + \frac{1}{2} \right\}$$

とする. また, $A_m$ の境界に正の向きをつけたものを $C_m$ とする.
複素積分 $\displaystyle\int_{C_m} f(z)\, dz$ を考えることにより, 等式

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi a} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n-a)^2}$$

を示せ. ただし, $C_m$ の任意の点 $z$ に対して

$$\left| \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} \right| \leq 2$$

であることを用いてよい.

**(F)**

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{\infty} \frac{nxe^{-x}}{2n + \sin x}\, dx$$

を求めよ.

$\boxed{\text{数学}}$

[7] 次の **(G)**, **(H)**, **(I)** のうち１つを選び 解答せよ.

**(G)**

$S$ を 0 と 1 の数列 $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 全体の集合, $T$ を 0 と 1 の有限列 $(b_k)_{k\le l}$ $(l\in\mathbb{N})$ 全体の集合とし, $t=(b_k)_{k\le l}\in T$ に対して $S_t=\{(a_k)_{k\in\mathbb{N}}\in S\mid (a_k)_{k\le l}=t\}$ とおく. 集合 $X\subset T$ は, 条件

$$\text{任意の有限集合}\,Y\subset X\,\text{に対して}\bigcup_{t\in Y}S_t\neq S \tag{$*$}$$

を満たすとする. 以下を示せ.

(1) $S=S_{(0)}\cup S_{(1)}$. ただし, $(i)$ は $i$ のみからなる長さ 1 の有限列である.

(2) 次の条件 $(**)$ を満たす $i\in\{0,1\}$ が存在する.

$$\text{任意の有限集合}\,Y\subset X\,\text{に対して}\,S_{(i)}\not\subset\bigcup_{t\in Y}S_t. \tag{$**$}$$

(3) $\displaystyle\bigcup_{t\in X}S_t\neq S$.

**(H)** 確率変数 $X$ は累積分布関数

$$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & (x>0),\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

をもつとする. ここで, $\lambda>0$ である. この分布から無作為標本 $X_1,...,X_n$ $(n\ge 3)$ を抽出する.

(1) $X$ の積率母関数を求めよ.

(2) $Y=\sum_{i=1}^n X_i$ とおく. $Y$ の確率密度関数 $f_Y(y)$ が以下で与えられることを示せ.

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^n y^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda y} & (y>0),\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

(3) $\lambda$ の最尤推定量を求め, その平均と分散を計算せよ.

# 数学

**(I)** $R$ をユークリッド整域，$d(\cdot)$ をユークリッド関数とし，$f, g \in R$, $f \neq 0$, $g \neq 0$ とする．このとき，$\lambda \geq 1$, $r_0, r_1, \ldots, r_{\lambda+1} \in R$ および $q_1, q_2, \ldots, q_\lambda \in R$ は次式を満たすとする:

$$\begin{aligned} r_0 &= f, \quad r_1 = g, \\ r_{i-1} &= r_i q_i + r_{i+1}, \quad d(r_{i+1}) < d(r_i), \quad (i = 1, \ldots, \lambda - 1), \\ r_{\lambda-1} &= r_\lambda q_\lambda, \quad r_{\lambda+1} = 0. \end{aligned}$$

また，$s_0, s_1, \ldots, s_{\lambda+1} \in R$ および $t_0, t_1, \ldots, t_{\lambda+1} \in R$ を次式で定める:

$$\begin{aligned} s_0 &= 1, & t_0 &= 0, \\ s_1 &= 0, & t_1 &= 1, \\ s_{i+1} &= s_{i-1} - s_i q_i, & t_{i+1} &= t_{i-1} - t_i q_i, \quad (i = 1, \ldots, \lambda). \end{aligned}$$

さらに，$i = 1, \ldots, \lambda$ に対し，行列 $T_i$ および $Q_i$ を

$$T_i = \begin{pmatrix} s_i & t_i \\ s_{i+1} & t_{i+1} \end{pmatrix}, \quad Q_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_i \end{pmatrix}$$

とおく．以下の問いに答えよ．ただし，$i = 1, \ldots, \lambda$ とする．

(1) $R$ の任意のイデアルは単項イデアルであることを示せ．

(2) $T_i \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_i \\ r_{i+1} \end{pmatrix}$ が成り立つことを示せ．

(3) $T_i = Q_i \cdots Q_1$ が成り立つことを示せ．

(4) $\det(T_i) = (-1)^i$ が成り立つことを示せ．

(5) $f = (-1)^i (r_i t_{i+1} - r_{i+1} t_i)$, $g = (-1)^i (-s_{i+1} r_i + s_i r_{i+1})$ が成り立つことを示せ．