# 解析分野紹介

桑原敏郎

筑波大学 数理物質系 数学域

2020 年 6 月

# 数学の大きな分類（筑波大学における分野）

代数学： 代数系 (二項演算を持つ集合) についての研究.
幾何学： 空間の形状の分類についての研究.
解析学： 微積分と関数の性質についての研究.
情報数学： 統計、論理、計算機について応用も含む研究.

数学と言えば "方程式" なので,

微分方程式

を１つのキーワードに解析学内の細分を概観してみることにする.

# 解析系教員の分野別構成

筑波大学の解析系は更に大きく3グループに細分される：

代数解析学： 解析の問題を代数的手法・観点から研究
（常微分方程式など）
竹山教授，桑原助教

偏微分方程式論： 関数解析的な立場から研究
（種々の偏微分方程式）
筧教授，木下准教授

確率論： 確率現象の数理モデルを研究
（確率微分方程式など）
濱名教授，福島准教授，松浦助教

※ 数学における解析学内の細分にはこれら以外の分野もある．

## 代数解析学 (解析の問題を代数的観点から研究)

常微分方程式は弱い条件の下でも大体一意的に解ける！
$\longrightarrow$ より強い仮定の下でより詳しく具体的な解析をする．

強い仮定 $\fallingdotseq$ 解析性（Taylor 級数表示可能性 (正則性）),

係数などに規則性・対称性などが現れ，代数的な手法が有効になってくる．

**例）超幾何微分方程式：** $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ として

$$x(1-x)y'' + \big[\gamma - (\alpha+\beta+1)x\big]y' - \alpha\beta y = 0$$

を考える．級数解 $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ を仮定して，上式に代入すると係数比較により解が得られて，

$$y(x) = {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+n)} \frac{x^n}{n!}.$$

超幾何関数は様々な初等関数，特殊関数を含んでいる：

$$(1-x)^{\nu} = {}_2F_1(-\nu, \beta; \beta; x),$$

$$\log(1+x) = x \cdot {}_2F_1(1, 1; 2; -x), \quad \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} = x \cdot {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; x^2\right),$$

$$\sin^{-1} x = x \cdot {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; x^2\right), \qquad \tan^{-1} x = x \cdot {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; -x^2\right).$$

その他に変換公式，積分表示などがある．更には，
**一般化超幾何関数**：$(\alpha)_0 = 1$, $(\alpha)_n = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}$ として，

$$ {}_pF_q(\alpha_1, \ldots, \alpha_p; \beta_1, \ldots, \beta_q; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n \cdots (\alpha_p)_n}{(\beta_1)_n \cdots (\beta_q)_n} \frac{x^n}{n!},$$

... など．
その他のキーワード：特異点理論への応用，超局所解析，量子可積分系（KZ 方程式 etc.）に関連する表現論，差分方程式，組み合わせ論，特殊関数．

# 偏微分方程式論

常微分方程式が一般に比較的弱い条件下で解けるのに対し，偏微分方程式は一般に解けるとは限らない．

**例）Lewy の方程式：** $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^1)$ は原点で解析的ではないとする．このとき $0 \in \mathbb{R}^3$ の任意の近傍 $U \subset \mathbb{R}^3$ に対し，次を満たす $u \in C^1(U)$ は存在しない：

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y} - 2i(x+iy)\frac{\partial u}{\partial z} = f'(z).$$

（注．解析性は $C^{\infty}$ 級よりも強い性質である）

$\Longrightarrow$ まず代表的な解ける型を指定する（物理的な重要性も加味）．いかなる摂動に対して一意可解性や型の特性が成り立つかを解析．時間発展する方程式の初期値問題を考察する場合は，線形や非線形の形に注目して解のライフスパン（最大存在時間）を解析．

Schrödinger 方程式（量子力学の線形方程式）

$$i\frac{\partial u}{\partial t} = (-\triangle + V)u.$$

双曲型方程式（波動現象に関する線形方程式）

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\triangle u.$$

Navier–Stokes 方程式（流体の非線形方程式）

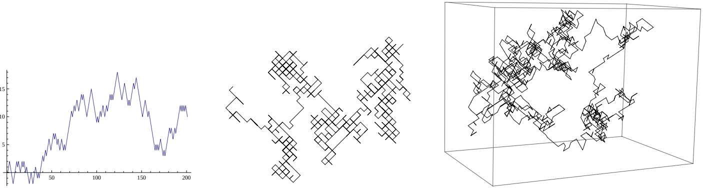
$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u\cdot\nabla)u = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\triangle u + f, \quad \nabla\cdot u = 0.$$

その他のキーワード：対称空間上の微分方程式，積分幾何，ウェーブレット，画像解析，安定性解析，計算機援用解析.

# 確率論 (確率現象の数理モデル)

測度論に確率的な解釈を組み入れた,(微分よりは)積分に基礎を置く解析学.

**例)ランダムウォーク:**格子点上を単位時間毎に等確率で隣の点に移動.




1, 2 次元…再帰的(ほとんど確かに確率 1 で出発点に戻る).

3 次元以上…非再帰的.

**確率微分方程式：**$X_t$ を未知の確率過程，$B_t$ を Brown 運動として，

$$\mathrm{d}X_t = \mu(X_t, t)\,\mathrm{d}t + \sigma(X_t, t)\,\mathrm{d}B_t$$

その他のキーワード：極限定理，大偏差原理，マルコフ過程.

# 過去３年の解析分野の修士論文タイトル(抜粋)

- 代数解析分野
  - パス・グラフの積の原点におけるスペクトル分布について
- 偏微分方程式分野
  - Hardy 空間 $H^2(\mathbb{R})$ 上のウェーブレットの構成とその性質
  - Shearlet 変換の一般化
  - トーラス上の重み付き L2 空間上での固有値問題について
  - 発進確率を考慮した交通流モデルに関するシミュレーションとその解析
  - 時間遅れをもつ Burgers 方程式と渋滞学への応用
  - 非整数階リッジレット変換
  - ２次元半空間定常 Stokes 方程式に関する考察
  - Gelfand-Shilov 空間におけるウェーブレット変換
- 確率分野
  - 確率微分方程式に基づく新たなアフィンイールド型金利モデルの考察