幾何学分野紹介

筑波大学数理物質系助教 蓮井翔 *

一口に幾何学といってもかなり広大な分野なので, ここでは多様体を中心として扱うような幾何学に限定してお話ししたいと思います. そうでない分野としては, たとえば位相の一般理論や「野生的」な空間 (多様体のような「飼い慣らされた」空間とはかけ離れた空間) に関わる**一般位相幾何学**があり, また**距離の幾何学**という分野もあります. 加えて, 筑波大学の場合は**力学系**や**エルゴード理論**を専門とされている先生も幾何学分野にいらっしゃいます. こうした分野の中で気になるものがあれば, 専門でやっている先生に質問してみるのもよいでしょう. もちろん, 以下でもう少し詳しく説明する 2 つの分野についても同様です.

さて, 多様体に関わる幾何学は大きく分けて 2 分野, **微分幾何学**と**位相幾何学**です. 非常に大雑把な言い方をすると, 微分幾何学は「多様体内部の構造を, 比較的 "固い" レベルで調べる分野」であり, 対して位相幾何学は「複数の多様体の間の関係を, 比較的 "やわらかい" レベルで調べる分野」ということができます. (なお, みなさんが講義を通じて馴染んでいるであろうということで話を多様体に限定していますが, 本当は位相幾何学では多様体以外もよく扱います. あくまで説明のための方便というくらいに思ってください.)

微分幾何学について

まずは微分幾何学の方から見ていくことにしましょう. 微分幾何学の研究対象である「多様体内部の構造」とは, たとえば多様体の曲がり方 (曲率という形で定式化される) や, どのような部分多様体が存在するか (分かりやすいところでは極小曲面, 発展的なトピックとしては可積分系, ラグランジュ部分多様体など) といったことです.

部分多様体の研究といっても, みなさんには今一つぴんと来ないかもしれません. こうした研究全体のモチベーションはちょっと一言で説明できるものではないのですが, たとえば微分方程式と深く関係している (積分曲線や積分多様体といった言葉を聞いたことがあるかと思います) という一事を取っても, このトピックの広がりが多少なり窺い知れるのではないでしょうか. 幾何学は物理学との関連 (たとえば「起こり得る状態のすべて」を空間として捉え, 多様体をそのような空間のモデルとみる) の中で発展してきた面があり, また理論物理学において微分方程式はその根幹をなす概念のひとつである (たとえば運動方程式がニュートン力学の要であるといわれるように) ということも併せて考えてみるとよいかもしれません.

また, 少し話は変わりますが, 曲がり方を考える以上, 多様体には微分構造だけでなくリーマン計量を入れておく必要があります. ここでどの程度 "よい" リーマン計量が入るかということも微分幾何学の研究対象となるのです. さらにいうと, 何らかの意味において "よい" 計量が入った多様体を舞台として展開される幾何学分野も色々とあります (**シンプレクティック幾何学**, **ケーラー幾何学**, **接触 (コンタクト) 幾何学**, **佐々木幾何学**). 上で例として挙げたラグランジュ部分多様体はシンプレクティック幾何学における重要概念です.

* e-mail address: s.hasui@math.tsukuba.ac.jp

あまり長くなるわけにもいかないので最後に少しだけ付け加えておくと, “微分” 幾何学というだけあって, 微分そのものや微分方程式といった解析的な道具立てがこの分野の基礎になっているのですが, 同じく関数解析もこの分野との関連で大いに活躍するものです. みなさんもご存知であろうガウス・ボンネの定理ですが, これは現在では**指数定理**というより壮大な定理の系のひとつと位置づけられており, この指数定理の基盤の大きな部分を占めるのが関数解析なのです.

位相幾何学について

続いてもう一方の位相幾何学について見ていきましょう. 位相幾何学の研究対象である「多様体の間の関係」というのは, まず同相やホモトピー同値 (つまり多様体の分類) であり, あるいはもう少し緩く「それらの多様体の間にどのような連続写像が存在するか」といった話題まで含むものです.

最初に微分幾何学は “固い”, 位相幾何学は “やわらかい” と書いたのはこうした事情によります. つまり, 位相幾何学では大体の場合に (微分) 同相やホモトピー同値, 写像同士の関係であればホモトピックといったレベルで同一視して考えることになりますが, 対して微分幾何学では「曲がり方」まで重要になるのですから, 微分同相ですら不十分ということになります ($\mathbb{R}^2$ 上の滑らかな関数 f に対して $z = f(x, y)$ という曲面を考えると, この曲面はどのような曲がり方をしていようが $\mathbb{R}^2$ に微分同相です).

さて, 位相幾何学についてもう少し具体的なイメージをもってもらうために, 次は不変量についてお話ししておきたいと思います. これは文字通り「不変な量」ということで, たとえば位相空間 X に対する n 次ホモロジー群 $H_n(X)$ や n 次ホモトピー群 $\pi_n(X)$ といったものは, ホモトピー同値に関して不変 (つまり X と Y がホモトピー同値なら $H_n(X) \cong H_n(X)$, $\pi_n(X) \cong \pi_n(Y)$) なのでホモトピー不変量と呼ばれます. この不変性を逆手にとって考えると, たとえば特定の空間 X および Y に対して $H_n(X) \ncong H_n(Y)$ であることが確認できた場合, X と Y はホモトピー同値ではない (従って同相でもない) と結論づけることができます. このように, 不変量は同相やホモトピー同値についての分類を考えるときの強力な道具になるわけです.

最後に, 位相幾何学の研究内容について, いくつか例を挙げてこの分野紹介を閉じることにしましょう. 当大学でも研究されている**低次元トポロジー**は, 主として 3 次元および 4 次元の多様体を扱う分野です. みなさんも曲面の分類定理については聞いたことがあるかと思いますが, 2 次元以下の多様体についてはもう既にかなりのことが分かっているわけです. そこで次は 3, 4 次元だということになります (本当はもっとちゃんとした学問的な理由が色々とあるのですが, そこは各自調べてみてください). また, 低次元トポロジーの中には**結び目理論**と呼ばれる領域があり, これは一言でいえば「結び目をほどく」ということを数学するものです. あまり踏み込んだ説明はできませんでしたが, 各先生の担当分野は調べればすぐに出てきますので, 興味をもった部分があれば直接お話を伺ってみるのがよいかと思います.

以下は注記です. 微分幾何学が多様体内部の構造, 位相幾何学が多様体間の関係というのはあくまで傾向的なものであって, 例外も多々あります. 位相幾何学においても不変量の計算などを分類とは無関係に行うことがありますし, また空間のホモトピー的な積構造について考えるような研究も, その空間の内的な構造を調べるものであるというべきでしょう. 微分幾何学の研究においても, 多様体の分類ということが全く意識されていないわけではありません.