

平面にランダムに点をばらまけるか？

福島 竜輝

数学類体験学習：2022 年 8 月 4 日

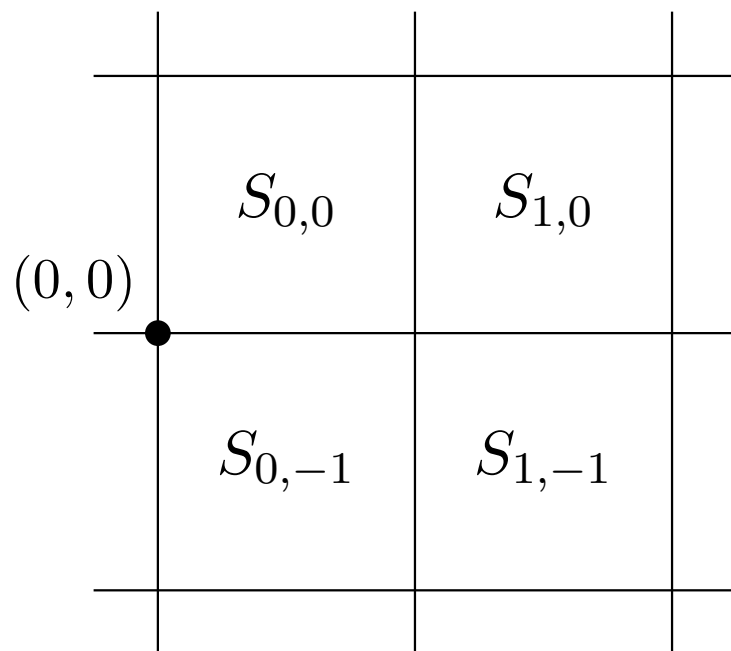
はじめに

2020 年度の初めからこの夏休みまで、筑波大学の学生たちはほぼオンラインで講義を受けています。皆さんが入学する頃には講義は対面に戻っている可能性が高いように思いますが、時事ネタとしてオンライン講義を体験するのも悪くないと思い、敢えて黒板などは使わず、オンラインらしいスタイルでやることにしました。いくつか注意があります。

- ノートをとるのはちょっと難しいと思います。事前に空欄のあるスライドを配布し、後で私が記入を終えたスライドも配布しますので、手元で少し計算をしながら聞くくらいで十分です。
- 高校1年生から3年生まで幅広く参加しているので、予備知識には差があると思います。知らない用語などが出てきたら遠慮なく質問してください。
- この講義は皆さんが楽しめるように、それなりに頑張って準備したつもりです。大学に入学してからの講義がすべて同じように楽しさに主眼をおいて準備されているかというと... (自粛します。懇親会で在学生に聞いてください。)

平面に一つの点をランダムに置けるか？

Q. 無限に広がる平面に一つの点 X をランダムに置けるだろうか？



平面を正方形に分割して、
左下の座標でラベルをつける.

$P(X \in S_{m,n}) = p$ とする.

(m, n) に関係なく、確率は
同様に確からしいとする.

- $S_{0,0}$ または $S_{1,0}$ に X が入る確率は？

$$P(X \in S_{0,0} \cup S_{1,0}) = \mathcal{P}(X \in S_{0,0}) + \mathcal{P}(X \in S_{1,0}) = 2p$$

- $S_{0,0}, S_{1,0}, \dots, S_{n,0}$ のどれかに X が入る確率は？

$$P(X \in S_{0,0} \cup S_{1,0} \cup \dots \cup S_{n,0}) = (n+1)p$$

平面に一つの点をランダムに置けるか？

前のページの最後の式

$$P(X \in S_{0,0} \cup S_{1,0} \cup \cdots \cup S_{n,0}) = (n+1)p.$$

において、左辺は確率だから 1 以下 $\Rightarrow p \leq \frac{1}{n+1}$

n は好きな自然数でよいはずだから... $p \leq \frac{1}{2}, p \leq \frac{1}{3}, \dots, p \leq \frac{1}{10^{23}}, \dots$

そうすると可能性としては... $p = 0$ しかない!

ところがこのとき

$$\begin{aligned} 1 &= P(\text{平面のどこかに } X \text{ がある}) = P\left(X \in \bigcup_{m,n} S_{m,n}\right) \\ &= \sum_{m,n} P(X \in S_{m,n}) \\ &= \sum_{m,n} 0 = 0 \quad (!?) \end{aligned}$$

集合の和

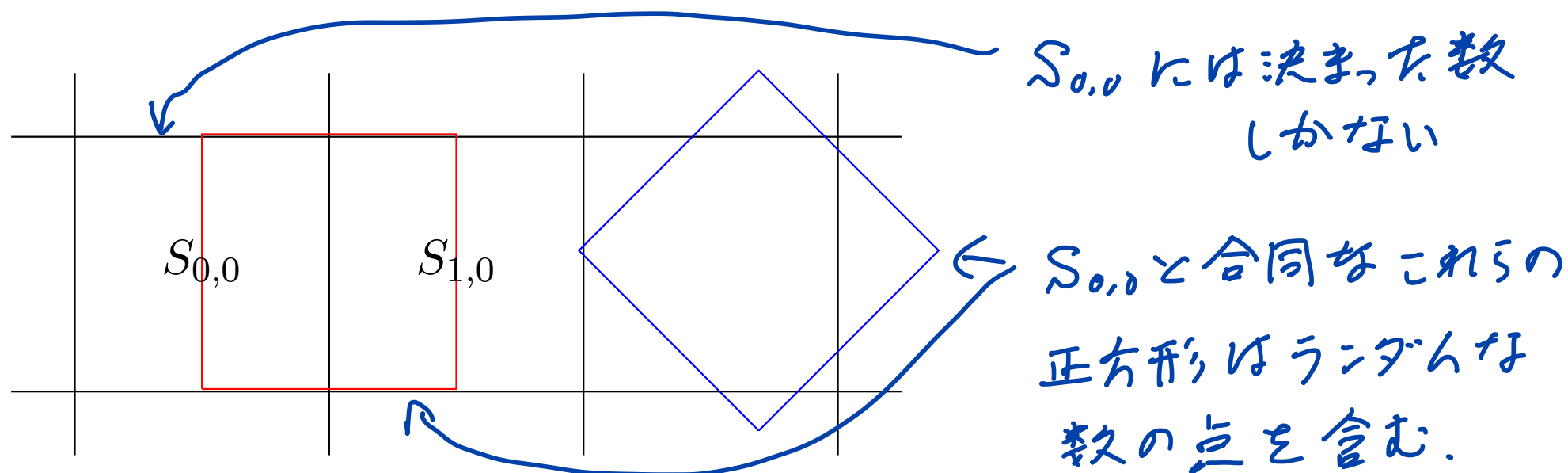
正方形の中に点をランダムにばらまけるか？

いきなり無限に広がる平面を考えるのは難しすぎた。有限な広がり領域で実験してみよう。→ ホワイトボードで作業。

何も困難はなくできているように思える。しかし...

参加者と同じ数の点しかないのは変だ！

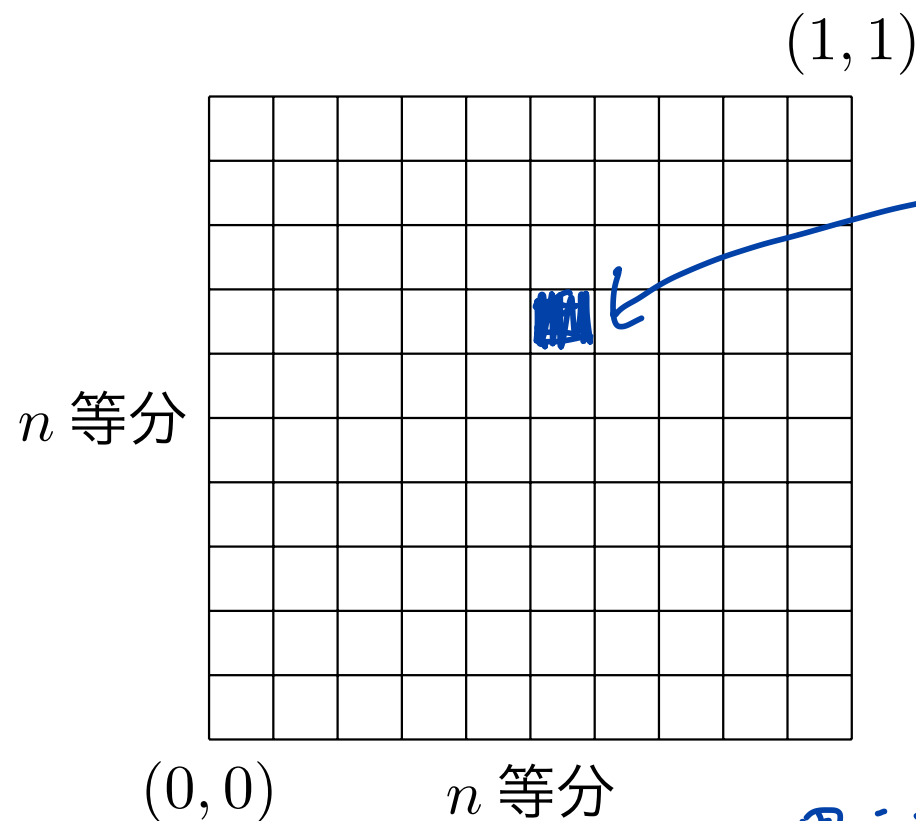
とくにこれができたら $S_{m,n}$ ごとにランダムに点をばらまいて、「全平面上のランダムな点配置」を作りたいが...



〜 あまり良い方法ではなさそう。

正方形の中に一つの点をランダムに置けるか？

もっと簡単な問題「正方形の中に一つの点をランダムに置けるか」に戻ってみよう.



n^2 個の小正方形から1つを $\left(\frac{1}{n^2}$ の確率で) ランダムにえらんで塗る.

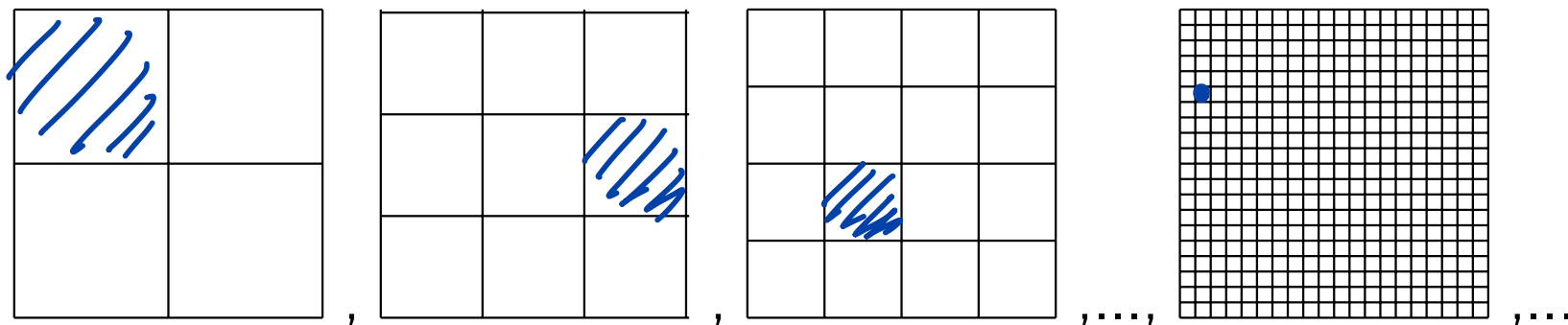
n が非常に大きければ...
($n = 10^{23}$ くらいとするとよい.)

小正方形は点と区別がつかない.

~~~~> これで1個の点は解決とする.

# 近似の意味に関するやや高度な脱線

$n = 1, 2, 3, \dots$  と増やしていくと...



となるが、この“極限”として「正方形の中に置かれたランダムな点」が決まるのだろうか？

点はどんどん小さくなるが、毎回位置は変わる

〜 普通のイミでは収束しない。

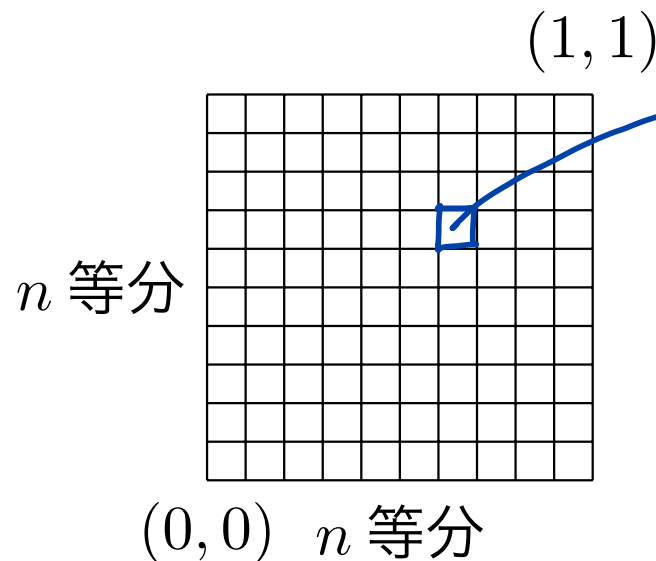
(実は点のランダムさの法則は“収束”する、大学4年位の内容。)

## 演習問題

塗られた正方形が、一点に収束していくようにする方法を考えよ。(この問題は答えは一つではないし、結構難しいと思うので昼食休憩用。)

# 正方形の中に点をランダムにばらまけるか？ —Take2

一個の点を置く問題が解決したら，次はランダムな個数の点をばらまいてみたい． 2 ページ前の方法を参考にすると...



$(\frac{k}{n}, \frac{l}{n})$  □ ごとに，確率  $\frac{1}{n^2}$  で塗る  
ことにして，全ての  $(k, l)$  で独立に  
行う． ( $X_{k,l} = 1 \longleftrightarrow$  塗った)  
→ 自然に点の数もランダムになる．

この方法で  $n$  をどんどん大きくすることで，正方形内のランダムな点配置が得られることは認めることにしよう． このとき点の個数の平均値は

$$\begin{aligned} E[\text{塗られた数}] &= E\left[\sum_{k,l=1}^n X_{k,l}\right] \\ &= \sum_{k,l=1}^n E[X_{k,l}] = \sum_{k,l=1}^n 1 \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2} \times n^2 = 1. \end{aligned}$$



# 正方形の中に点をランダムにばらまけるか？ —Take2

したがって、平均すると一個の点があることになる。しかし当然ながら「必ず一個の点がある」わけではないし、個数の分布がどうなっているかが気になる。

そこでこれからしばらくは

Q1 正方形の中に一個も点がない確率は？

Q2 正方形の中にちょうど  $k$  個の点がある確率は？

という問題を考えてみる。まず

$$\begin{aligned} P(\text{正方形の中に一個も点がない}) \\ &= (\text{小正方形が塗られない確率})^{\text{小正方形の個数}} \\ &= \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \quad \xrightarrow{n \rightarrow \infty} ? \end{aligned}$$

この最後の式は  $n$  をどんどん大きくするときにどうなるのだろうか？

# 高校数学との接続のために脱線

高校の数学教科書と同じ展開にするために少し細工をする.

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = \left(1 - \frac{1}{n^4}\right)^{n^2} \sim 1$$

これは小正方形を塗る確率を  $\frac{1}{n^4}$  にしたときに, 一つも点がない確率である. このように設定を変えると, 点の個数の平均値は...

$$E \left[ \sum_{k,l=1}^n X_{k,l} \right] = \sum_{k,l=1}^n \underbrace{P(X_{k,l} = 1)}_{= \frac{1}{n^4}} = \frac{1}{n^4} \times n^2 = \frac{1}{n^2} \sim 0.$$

↑  
“近い”

そうすると上の「一つも点がない確率」はほとんど1になるはずだから...

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \sim \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}$$

以下、この分母を考える.

## ここからしばらく大幅に脱線

というわけで  $(1 + \frac{1}{n})^n$  が  $n$  をどんどん大きくしたときにどうなるかを知りたいという問題に行き着いた.

とりあえず具体的な数字を代入して, 実際にやってみよう.

WolframAlpha をキーワードに Google 検索するか,  
アドレス <https://www.wolframalpha.com/> へ GO.

入力欄に「 $1.001^{1000}$ 」と入力して Enter key を押せば  $(1 + \frac{1}{1000})^{1000}$  が計算できる.

これから**ホワイトボード**に移行する. 自然数  $m$  を好きなように選んで,  
 $(1 + \frac{1}{10^m})^{10^m}$  を計算し,

$$m = 3 \rightarrow 2.7169239322\dots$$

のように小数第 10 位まで書こう. 他の人と位は揃えて書くことと, 適当なスペースを残しておくこと.  $\rightsquigarrow$   $2.718\dots$  に近付いていくように見える.

$(1 + \frac{1}{n})^n$  はある特定の数に近づく？

実験の結果を見ると、上の桁からどんどん数字が決まっていくように見える。

実数 = {10 進無限小数で表せる数}

とすると、これで収束と言えるようだが...

実験は証明には足りない！

〜 本当に各桁の数字は「決まっていく」のか？

上に書いた「上の桁からどんどん数字が決まっていく」を証明しよう。

Q3 2.7182... の整数の部分がずっとあとで 3, 4 になることはないのか？

Q4 2.7182... の小数のある桁が無限に振動することはないのか？

という二つの問題に分けて考察する。

↑ こうして問題を証明可能な命題に書き換えるのは数学の重要なステップ。

# $(1 + \frac{1}{n})^n$ を展開してわかる性質

二項定理を使うと,

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^n {}^nC_k \left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k} \quad \left( \begin{array}{l} \text{ただし} \\ 0! = 1 \end{array} \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n \cdot n \cdot \cdots \cdot n} \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \end{aligned}$$

## 演習問題

- ①  $n$  をどんなに大きくしても 3 を超えないことを証明せよ.
- ②  $n$  を大きくすると大きくなることを証明せよ.  $(1 + \frac{1}{n})^n \leq (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}$

$$\begin{aligned} \text{① } 1 + 1 + \underbrace{\frac{1}{2!}}_{\wedge \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3!}}_{\wedge \frac{1}{4}} + \cdots &< 1 + 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}}_{\leq 1 \text{ (ゼノンの矢)}} \\ &\leq 3 \end{aligned}$$

$$\text{② } \frac{n-l}{n} < \frac{n+1-l}{n+1} \text{ を使う.}$$

# $(1 + \frac{1}{n})^n$ は決まった数に収束する

前の演習問題の結果から  $(1 + \frac{1}{n})^n$  について

|            |               |           |                        |
|------------|---------------|-----------|------------------------|
| $n = 1$    | $\rightarrow$ | 2.0000... | $\uparrow$ これが最大.      |
| $n = 10$   | $\rightarrow$ | 2.5937... | $\uparrow$ ?           |
| $n = 100$  | $\rightarrow$ | 2.7048... | $\uparrow$ 最大値になるまで待つ. |
| $n = 1000$ | $\rightarrow$ | 2.7169... | $\uparrow$ 最大値になるまで待つ. |

という手続きで、無限小数が決まりそう. これを保証する実数の性質を「連続性」という:

上に有界な単調増加数列はある実数に収束する.

こうして決まる数  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$  を Napier の数という. (Euler の数ということもある.)  $\uparrow$  「 $n$  を限りなく大きくすると」の意味.

# ようやく脱線から復帰

Q1 正方形の中に一個も点がない確率は？

$$P\left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \text{ に一つも点がない} \right) = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$$
$$\sim \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}} \sim \frac{1}{e} = \frac{1}{2.718\dots}$$

Q2 正方形の中にちょうど  $k$  個の点がある確率は？

$k$  個の点は  $n^2$  個の候補から選ぶから、

$$P\left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \text{ にちょうど } k \text{ 個点がある} \right) = {}_{n^2}C_k \left(\frac{1}{n^2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^2-k}$$
$$= \frac{n^2(n^2-1)\dots(n^2-k+1)}{k \cdot (k-1) \dots 1} \left(\frac{1}{n^2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{-k}$$
$$\sim \frac{1}{k!} \frac{1}{e} \quad (n \rightarrow \infty)$$

# Poisson 配置

この方法で作ったランダムな点のばらまき方を Poisson 配置という。これは正方形以外の図形にも簡単に一般化できて...

$$\begin{aligned}
 &P\left(\overset{D}{\text{図形}} \text{ にちょうど } k \text{ 個点がある} \right) \\
 &\sim n^2 |D| C_k \left( \frac{1}{n^2} \right)^k \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right)^{n^2 |D| - k} \quad (|D| \text{ は } D \text{ の面積}) \\
 &= \frac{1}{k!} \frac{\cancel{n^2 |D|} (\cancel{n^2 |D| - 1}) \cdots (\cancel{n^2 |D| - k + 1})}{\cancel{n^2} \cdots \cancel{n^2}} \left[ \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right)^{n^2} \right]^{|D|} \sim \frac{|D|^k}{k!} e^{-|D|}
 \end{aligned}$$

小正方形の数  
~ n<sup>2</sup> |D|.

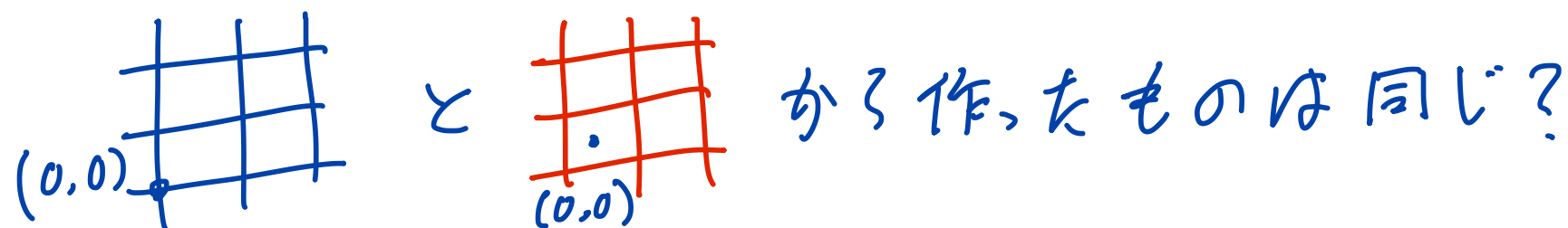
これをパラメータ  $|D|$  の Poisson 分布といい、点の数の平均は...

$$\begin{aligned}
 E[D \text{ にある点の数}] &\sim \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{|D|^k}{k!} e^{-|D|} \\
 &= |D| \underbrace{\sum_{l=0}^{\infty} \frac{|D|^l}{l!} \cdot e^{-|D|}}_{=1} = |D|.
 \end{aligned}$$



# 全平面の Poisson 配置

正方形にランダムに点がばらまけたら、それを貼り合わせて全平面のランダムな点配置を考えたいのだった。それはもちろんできるが...



Poisson 配置の作り方を思い出すと、“明らかに”...

$$\left( D_1^{\#} \mid D_2^{\#} \right) \text{ の Poisson 配置 } = \left( D_1^{\#} \right) \text{ の Poisson 配置 } + \left( D_2^{\#} \right) \text{ の Poisson 配置.}$$

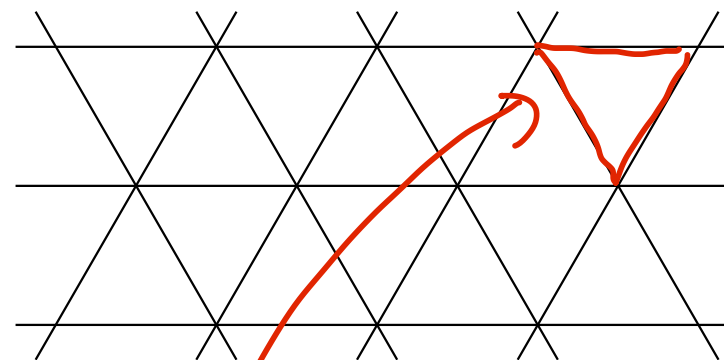
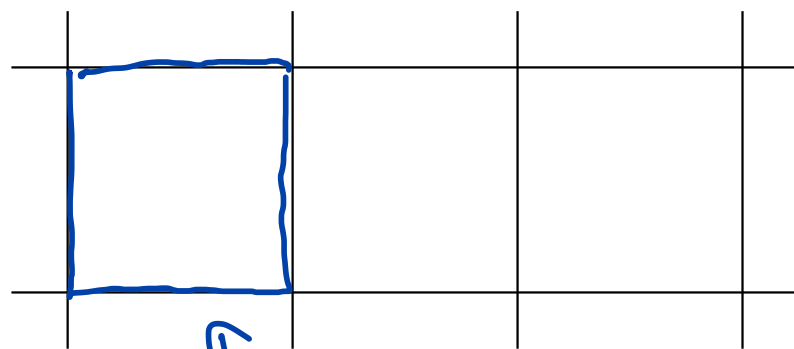
この事実を使って、

全平面を適当に分割してそれぞれの区画で Poisson 配置を考え、それを貼り合わせたとき、結果は分割の仕方に依らない

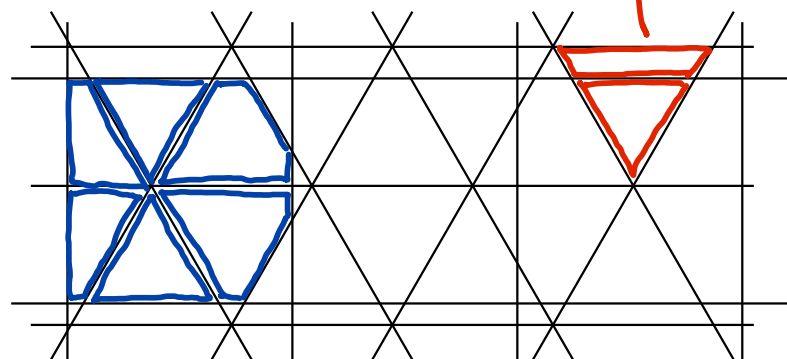
ということがわかる。

# 全平面の Poisson 配置の普遍性

実際, 下のような二つの分割の仕方を考えると...



前のページに書いた性質から, これらはどちらも下の細かい分割から作ったものと同じになっている:



→ Poisson 配置.  
が作れる.

このように「誰がどう作っても同じものができる」という性質を普遍性という. この意味でこれは平面に点をばらまく“標準的な”方法である.

## また脱線： $e$ は無理数

正方形内の Poisson 配置を考えたときに,

$$P\left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \text{ にちょうど } k \text{ 個点がある} \right) \sim \frac{1}{k!} e^{-1}$$

という表示を得た. これをすべての  $k$  について足し合わせると, 確率だから 1 になるはず. そうすると...

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

### 演習問題

この表示を使って  $e$  が無理数であることを証明せよ. (ヒント:  $e = p/q$  と仮定して, 両辺に  $q!$  を掛けてみる.)

$$\begin{aligned} \underbrace{p(q-1)!}_{(\text{整数})} &= q! e = q! \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} + q! \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \\ &= (\text{整数}) + \left( \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \dots \right) \\ &\quad \hookrightarrow \text{これは } \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = 1 \text{ より小さい.} \end{aligned}$$

## またまた脱線： $e^x$ の微分

Poisson 配置を一般の図形に対して考えたときに,

$$P\left(\overset{D}{\text{図形}} \text{ にちょうど } k \text{ 個点がある}\right) \sim \frac{|D|^k}{k!} e^{-|D|}$$

という表示を得た.  $|D| = x$  として, 前のページと同じように考えると

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

### 演習問題

この表示を使って  $e^x$  は微分しても  $e^x$  であることを説明せよ.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} e^x &= \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{(ちよつと危険)} \end{aligned} = e^x.$$

## Poisson 配置は唯一のばらまき方？

本題に戻って、Poisson 配置が自然で標準的なランダムな点のばらまき方であることはわかったが、他には無いのだろうか？

例えば図形  $D$  に落ちる点の個数  $N$  を Poisson 分布以外にできるか考えてみる。例えばちょうど  $k$  個の点がある確率が

$$P(N = k) = p^k(1 - p) \quad (\text{幾何分布という})$$

という形にできるだろうか？

点の個数の平均  $\sum_{k=1}^{\infty} kp^k(1 - p)$  は  $|D|$  にしておきたいとすると...

$$\sum_{k=1}^{\infty} k p^k (1 - p) = \frac{p}{1 - p} = |D|$$

$$\left( \sum_{k=1}^{\infty} k p^{k-1} = \frac{1}{(1 - p)^2} \right) \Rightarrow p = \frac{|D|}{1 + |D|}$$

ということを使った。

## 点の数が幾何分布になる点のばらまき方はあるか？

したがって  $p = \frac{|D|}{1+|D|}$  が自然な選択であることがわかった。そこで面積

が1の正方形を2つ並べた  の、左の点の数を  $N_1$ 、右の点の数を  $N_2$ 、全体の点の数を  $N_3$  としてみると...

$$P(N_1 + N_2 = n)$$

$$= \sum_{k=0}^n P(N_1 = k) P(N_2 = n - k)$$

$$= \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{n+1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$P(N_3 = n) = p_3^n (1 - p_3)$$

$$= \left(\frac{2}{1+2}\right)^n \cdot \frac{1}{3}$$

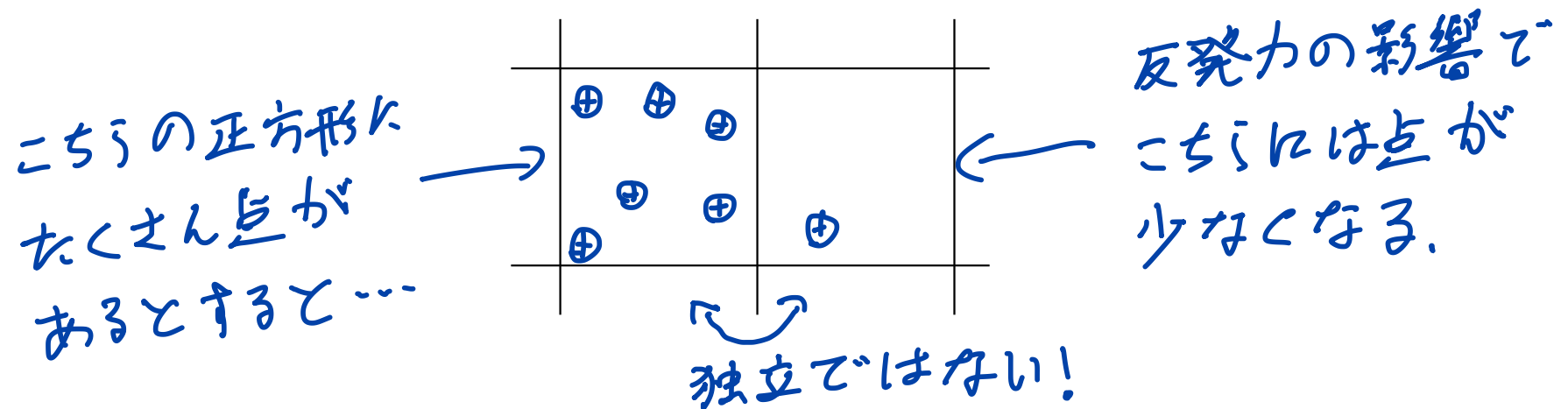
$$= \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{3}$$

だから計算が合わない。ただし左の計算では  $N_1$  と  $N_2$  は独立と仮定している。これは考える領域ごとに独立で、点の数の平均が面積と一致して、その分布が幾何分布になるような点配置は存在しないことを意味する。実は...

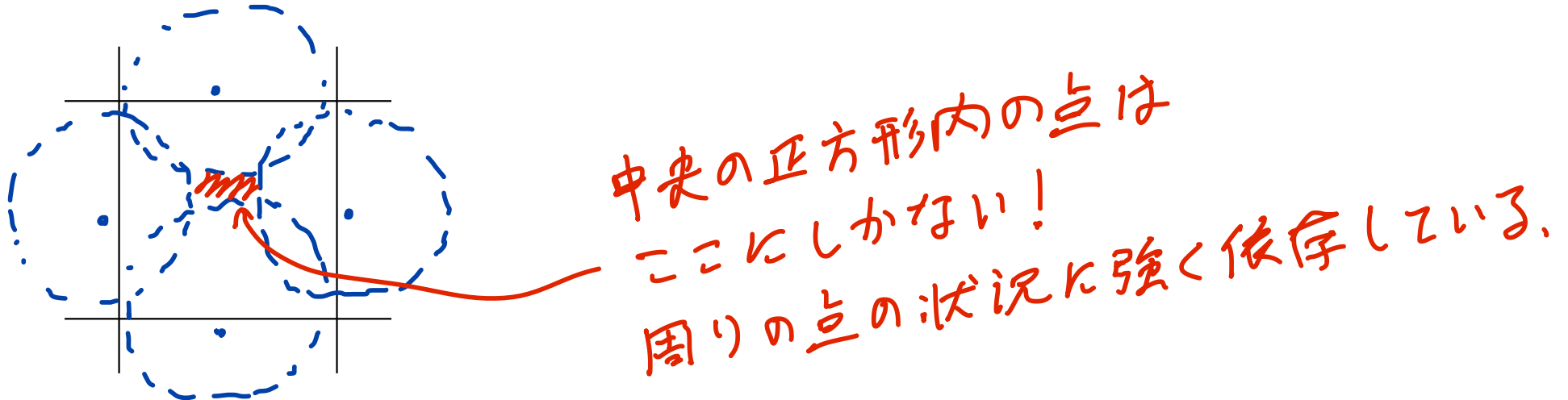
異なる（交わらない）領域の点の数が独立である  
ようなランダムな点配置は Poisson 配置に限る！

## Poisson 配置は唯一のばらまき方？ —Take 2

これにて決着かというところ...、そうではない。前のページでは「 $N_1$  と  $N_2$  は独立と仮定」したが、それはいつでも自然な仮定というわけではない。例えば荷電粒子を考えると...



またもっと過激に一定の距離以上近づけないという制限をつけると...



# Poisson 配置を超えて—展望—

相互作用のある点をランダムに配置する問題は物理学との関連を考えても重要であるが、数学的にはかなり高度な問題になる。

- あまり遠くの点とは相互作用しないという条件のもとでは 1970 年代の Dobrushin, Landford, Ruelle に始まる研究があって、それなりに理解が進んでいる。
- 荷電粒子のように、遠くの点とも比較的強く相互作用するような点の配置は今でも盛んに研究されている。係数をランダムに決めた多項式が 0 になる点の配置など、意外なものとの関連が現れる。高橋陽一郎氏、白井朋之氏らが、先駆的な研究をされた。

暑い中、長時間お疲れさまでした！