平成２７年度

筑波大学大学院 数理物質科学研究科 入学試験

数学専攻 試験問題

専門科目

注意事項

1. 問題冊子はこの表紙を入れて７枚からなる。試験開始の合図があるまでは問題冊子を開けないこと。

2. 問題は専門基礎課題が３題（[1],[2],[3]）と専門課題が４題（[4],[5],[6],[7]）の合計７題ある。そのうち４題選択し解答せよ。ただし，
[4] を選択する場合には (A), (B) のいずれか一つに答えよ。両方を選ぶことはできない。
[5] を選択する場合には (C), (D) のいずれか一つに答えよ。両方を選ぶことはできない。
[6] を選択する場合には (E), (F) の両方に答えよ。
[7] を選択する場合には (G), (H), (I) のいずれか一つに答えよ。二つ以上を選ぶことはできない。

3. 答案冊子は答案用紙４枚からなる。それぞれの答案用紙に，研究科名・専攻名・受験番号を記入すること。解答は答案用紙１枚につき１題とし，それぞれの答案用紙の左上に解答する問題番号を記入せよ。また，[4], [5], [7] では (A), (B), (C), (D), (G), (H), (I) の記号も記入せよ。おもて面だけで書ききれない場合には,「ウラへ」と明記して裏面を使用してよい。

4. 下書用紙は４枚ある。それぞれの下書用紙に，研究科名・専攻名・受験番号を記入すること。

5. 問題冊子も下書用紙も回収する。

数学

注意　$\mathbb{C}$ は複素数全体, $\mathbb{R}$ は実数全体, $\mathbb{Q}$ は有理数全体, $\mathbb{Z}$ は整数全体, $\mathbb{N}$ は自然数全体をそれぞれ表すものとする.

[1] $0 \leq \alpha \leq \pi$ に対して

$$D_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - \cos\alpha)^2 + (y - \sin\alpha)^2 \leq 1\}$$

$$I_\alpha = \iint_{D_\alpha} x\, dxdy$$

とする.

(1) 次の積分を計算せよ.

$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta, \qquad B = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta \sin\theta d\theta, \qquad C = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\theta.$$

(2) D_α を極座標 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を用いて表せ.

(3) I_α を計算せよ.

[2] $\mathbb{R}^3$ のベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{a}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

を列ベクトルとする 3×5 行列 $A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5)$ と A の定める線形写像

$$f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3, \quad f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

について, 以下の問いに答えよ.

(1) f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ の基底を 1 組求めよ.

(2) $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_5$ のなかから線形独立なベクトルの組を 1 組選び, 残りのベクトルをその線形結合で表せ.

(3) $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ となる線形写像 $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ を 1 つ求めよ. ただし $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ は $\mathbb{R}^3$ の恒等写像とする.

数学

[3] 集合 S のベキ集合 (S の部分集合全体の成す集合) を $\mathcal{P}(S)$ で表す. 以下の問いに答えよ.

(1) X, Y を集合 Z の部分集合とする. このとき, 次を示せ.

$$\mathcal{P}(X \cup Y) \subset \mathcal{P}(X) \cup \mathcal{P}(Y) \quad \Leftrightarrow \quad X \subset Y \text{ または } Y \subset X.$$

(2) 写像 $f : X \to Y$ に対して, 写像 $f^* : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ を $f^*(A) = f^{-1}(A)$ で定義する. ただし $f^{-1}(A) = \{x \in X \mid f(x) \in A\}$ とする. このとき, 次を示せ.

$$f \text{ は単射} \quad \Leftrightarrow \quad f^* \text{ は全射}.$$

[4] 次の **(A), (B)** のうち **1つを選び** 解答せよ.

(A) n を自然数, $M_n(\mathbb{R})$ を n 次の実正方行列全体の集合, E_n を n 次の単位行列とする. $G_n = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = E_n\}$ と置く. ただし ${}^tA$ は A の転置行列を表す.

(1) G_n は行列の乗法に関して群をなすことを示せ.

(2) G_n の元で全ての成分が整数であるものの全体を H_n とすると, H_n は G_n の部分群になることを示せ.

(3) H_2 の元をすべて求め, H_2 が位数 (サイズ) 8 の二面体群すなわち 4 次の二面体群と同型であることを示せ.

(4) H_n の位数 (サイズ) が有限であることを示し, その値を求めよ.

(B) 環に関する以下の命題の真偽を判定し, その理由を述べよ.

(1) 剰余環 $\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}$ のイデアルの個数は 4 個である.

(2) $x - y - 1$ は $\mathbb{R}[x, y]$ の素元である.

(3) I, J が可換環 R のイデアルであれば, $I \cup J$ も R のイデアルである.

(4) 2 次の実正方行列全体のなす環 $M_2(\mathbb{R})$ の両側イデアルは, $M_2(\mathbb{R})$ と $\{O\}$ のみである. ここで O はゼロ行列である.

数学

[5] 次の **(C), (D)** のうち **1 つを選び** 解答せよ.

(C) C^∞ 級微分同相な関数 $f,\ g : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ に対して, C^∞ 級関数 $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を

$$h(u,v) = 1 + \tan^2 f(u) + \tan^2 g(v)$$

で定め, C^∞ 級写像 $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を

$$\varphi(u,v) = (\, f(u),\ g(v),\ \log(\cos f(u)) - \log(\cos g(v))\,)$$

で定める. このとき以下の問いに答えよ.

(1) φ ははめ込みであることを示せ.

(2) φ の第 1 基本量 $E(u,v)$, $F(u,v)$, $G(u,v)$ および第 2 基本量 $L(u,v)$, $M(u,v)$, $N(u,v)$ を求め, φ の平均曲率 H は恒等的に 0 であることを示せ.

(3) φ のガウス曲率 K について, 任意の $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ に対して,

$$K(u,v) \leq -\frac{1}{h(u,v)}$$

が成り立つことを示せ.

(D) 距離空間 $(X,\ d)$ に関する次の条件 $(*)$ を考える:

$(*)$ 任意の $\varepsilon > 0$ と任意の $x, y \in X$ に対して, 有限点列 $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \in X$ で

$$\begin{aligned} &x_1 = x,\ \ x_n = y, \\ &d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon \quad (i = 1, \ldots, n-1) \end{aligned}$$

を満たすものが存在する.

(1) $(X,\ d)$ が連結ならば, $(X,\ d)$ は条件 $(*)$ を満たすことを示せ.

(2) $(X,\ d)$ がコンパクトでかつ条件 $(*)$ を満たすならば, $(X,\ d)$ は連結であることを示せ.

数学

[**6**] 次の **(E), (F)** の**両方を**解答せよ.

(E) 複素平面上の関数 $f(z) = e^{i\left(\frac{z^3}{3}+z\right)}$ について以下の問いに答えよ.

(1) x と η を実数とする. $|f(x+i\eta)|$ を求め, $\eta > 0$ のとき積分

$$F(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+i\eta)| dx$$

を求めよ. 必要ならば

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

を用いてもよい.

(2) $R > 0, \eta > 0$ とする. 複素平面上の 4 点 $-R$, R, $R + i\eta$, $-R + i\eta$ を頂点とする長方形の周に沿う $f(z)$ の積分を考えることにより

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+i\eta)dx$$

が成立することを示せ.

(F) f を $\mathbb{R}$ 上のルベーグ可積分関数とする. 以下の問いに答えよ.

(1) $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(y)dy$ と定義する.

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)dy$$

であることを示せ.

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ のとき極限

$$\lim_{t\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(tx)}{x^2+1} dx$$

を求めよ.

[7] 次の **(G), (H), (I)** のうち**１つを選び** 解答せよ.

(G) $(A,<)$ を順序集合とする. $b \in A$ に対して, $A_{\leq b} = \{a \in A \mid a \leq b\}$, $A_{\geq b} = \{a \in A \mid a \geq b\}$ と定める. $(A,<)$ が次の２条件を満たすとき, 木と呼ぶ.

- 任意の $b \in A$ に対して, $(A_{\leq b},<)$ は整列集合である.
- $(A,<)$ は最小元を持つ.

また $a < b$ かつ $A_{\leq a} \cup \{b\} = A_{\leq b}$ であるとき, b を a の直後元と呼ぶ.
$(A,<)$ を木とするとき, 次の問いに答えよ.

(1) $a \in A$ が極大元でないならば, a は直後元を持つことを示せ.

(2) 任意の $a \in A$ に対して, $(A_{\geq a},<)$ が木になることを示せ.

(3) 任意の $a \in A$ に対して, a の直後元は高々有限個であるとする. A が無限集合ならば $(A,<)$ は無限上昇列を持つことを示せ.

順序集合 $(S,<)$ が整列集合であるとは, その任意の空でない部分集合が最小元を持つことである.

(H) R を整域とする. 次の条件を満たす関数 $d : R \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ が存在するとき R をユークリッド整域という.

任意の $a,\, b \in R$ に対して, $b \neq 0$ ならば $r,\, q \in R$ が存在して, $a = bq + r$ かつ $d(r) < d(b)$ が成り立つ.

また, $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ をガウス整数の全体 $\{m + n\sqrt{-1} \mid m,\, n \in \mathbb{Z}\}$ と定義する. 以下の問いに答えよ.

(1) $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ が $\mathbb{C}$ の部分環であることを示せ.

(2) ユークリッド整域 R は, 単項イデアル整域であることを示せ.

(3) $d(m + n\sqrt{-1}) = m^2 + n^2$ と定義することで $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ がユークリッド整域になることを示せ.

(4) $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ における $1 + 3\sqrt{-1}$ と $5 + 3\sqrt{-1}$ の最大公約元の 1 つを求めよ.

(I) 確率変数 $X_1, \cdots, X_n$ $(n \geq 3)$ は互いに独立に, いずれも次の確率密度関数 $f(x; \alpha, \beta)$ をもつ分布に従うとする.

$$f(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} \dfrac{\alpha \beta^{\alpha}}{x^{\alpha+1}} & (x > \beta), \\ 0 & (\text{その他}). \end{cases}$$

ただし, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ とする.

(1) α, β の最尤推定量 $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ が, $\hat{\alpha} = \dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} \log(X_i / X_{(1)})}$, $\hat{\beta} = X_{(1)}$ となることを示せ. ただし, $X_{(1)} = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$ とする.

(2) $S = \dfrac{n}{\hat{\alpha}}$, $T = \hat{\beta}$ とするとき, S と T は独立で, (S, T) の同時確率密度関数 $f(s, t; \alpha, \beta)$ は

$$f(s, t; \alpha, \beta) = \begin{cases} \dfrac{n \alpha^n \beta^{n\alpha}}{\Gamma(n-1)} \cdot \dfrac{s^{n-2} e^{-\alpha s}}{t^{n\alpha+1}} & (s \geq 0,\ t \geq \beta), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

で与えられる. ただし, $\Gamma(u) = \displaystyle\int_0^{\infty} x^{u-1} e^{-x} dx$ $(u > 0)$ とする. $\alpha > \dfrac{1}{n}$ のとき, 期待値 $E[\hat{\alpha}]$, $E[\hat{\beta}]$, $E[\hat{\beta}/\hat{\alpha}]$ を求めよ.

(3) (2) を用いて, α, β の不偏推定量 $\hat{\alpha}^*$, $\hat{\beta}^*$ を求めよ.