平成３０年度

筑波大学大学院 数理物質科学研究科 入学試験

数学専攻 試験問題

専門科目

注意事項

1. 問題冊子はこの表紙を入れて６枚からなる。試験開始の合図があるまでは問題冊子を開けないこと。

2. 問題は専門基礎課題が３題 ([1],[2],[3]) と専門課題が４題 ([4],[5],[6],[7]) の合計７題ある。そのうち４題選択し解答せよ。ただし,
[4] を選択する場合には (A), (B) のいずれか一つに答えよ。両方を選ぶことはできない。
[5] を選択する場合には (C), (D) のいずれか一つに答えよ。両方を選ぶことはできない。
[7] を選択する場合には (G), (H), (I) のいずれか一つに答えよ。二つ以上を選ぶことはできない。

3. 答案冊子は答案用紙４枚からなる。それぞれの答案用紙に，研究科名・専攻名・受験番号を記入すること。解答は答案用紙１枚につき１題とし，それぞれの答案用紙の左上に解答する問題番号を記入せよ。また，[4], [5], [6], [7] では (A), (B), (C), (D), (E), (F), (G), (H), (I) の記号も記入せよ。おもて面だけで書ききれない場合には,「ウラへ」と明記して裏面を使用してよい。

4. 下書用紙は４枚ある。それぞれの下書用紙に，研究科名・専攻名・受験番号を記入すること。

5. 問題冊子も下書用紙も回収する。

数学

注意　$\mathbb{C}$ は複素数全体, $\mathbb{R}$ は実数全体, $\mathbb{Q}$ は有理数全体, $\mathbb{Z}$ は整数全体, $\mathbb{N}$ は自然数全体をそれぞれ表すものとする.

[1] 次の問いに答えよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{d\theta}{\cos\theta}$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\leq\sqrt{3}} \cos\left(\tan^{-1}(x^2+y^2)\right) dxdy$ を求めよ.

[2] $\mathbb{R}$ 上の 3 次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ のベクトル

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と，3 次の正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

を考える.

(1) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は $\mathbb{R}^3$ の基底であることを示せ.

(2) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は A の固有ベクトルであることを示せ.

(3) c を実数の定数とし，ベクトル $\boldsymbol{x}$ を

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ c \\ 1 \end{pmatrix}$$

で定める. $\mathbb{R}^3$ の標準内積を $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ で表すとき，極限 $I = \lim_{n\to\infty} (\boldsymbol{x}, A^n\boldsymbol{x})$ が 0 でない値に収束するような c の値を求め，そのときの I の値を計算せよ.

数学

[3]　A, B を集合とする．写像 $f : A \to B$ に対して写像 $\overline{f} : P(P(A)) \to P(P(B))$ を

$$\overline{f}(H) = \{f(X) \mid X \in H\} \quad (H \in P(P(A)))$$

で定義する．ただし，$P(A)$ は A のベキ集合である．以下を示せ．

(1) f が単射ならば，$\overline{f}$ も単射である．

(2) $\overline{f}$ が単射ならば，f も単射である．

[4] 次の **(A)**, **(B)** のうち **1つを選び** 解答せよ．

(A) 次の問いに答えよ．

(1) 加法群 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ から有理数体 $\mathbb{Q}$ の加法群 $(\mathbb{Q}, +)$ の中への単射準同型写像は存在しないことを示せ．

(2) 加法群 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ から $\mathbb{Q}$ の乗法群 $(\mathbb{Q}^*, \times)$ の中への単射準同型写像を 1 つ構成せよ．

(3) K を $\mathbb{Q}$ の 2 次拡大体とする．このとき，加法群 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ から K の加法群 $(K, +)$ の中への単射準同型写像は存在しないことを示せ．

(B)　$\mathbb{Z}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{0, 1, 2\}$ とし，$\mathbb{Z}_3[x]$ を $\mathbb{Z}_3$ に係数をもつ 1 変数多項式環とする．$f(x) \in \mathbb{Z}_3[x]$ に対して，$f(x)$ で生成される $\mathbb{Z}_3[x]$ のイデアルを $(f(x))$ で表す．以下の問いに答えよ．

(1) $\mathbb{Z}_3[x]$ に含まれる 1 次以下の多項式をすべて挙げよ．

(2) 剰余環 $\mathbb{Z}_3[x]/(x^2+1)$ において，$x+1 \bmod (x^2+1)$ の積に関する逆元を求めよ．

(3) 剰余環 $\mathbb{Z}_3[x]/(x^2+1)$ が体になることを示せ．

(4) $f(x) \in \mathbb{Z}_3[x]$ であって，$\mathbb{Z}_3[x]/(f(x))$ が 9 個の元からなる体になるものはいくつあるか．

[5] 次の (C), (D) のうち **1つを選び** 解答せよ.

(C) $\mathbb{R}^3$ 内の平面 $H = \{ p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3 \mid p_1 + p_2 + p_3 = 1 \}$ の開部分多様体 M を

$$M = \{ p = (p_1, p_2, p_3) \in H \mid p_1 > 0,\, p_2 > 0,\, p_3 > 0 \}$$

で定め，球面 $S^2 = \{ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \}$ の開部分多様体 N を

$$N = \{ x = (x_1, x_2, x_3) \in S^2 \mid x_1 > 0,\, x_2 > 0,\, x_3 > 0 \}$$

で定める．また，M の点 $p = (p_1, p_2, p_3)$ に対して，N 上の C^∞ 級関数 $f_p \colon N \to \mathbb{R}$ を

$$f_p(x) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 \quad (x = (x_1, x_2, x_3))$$

で定義する．

(1) $\mathbb{R}^3$ の原点と N の点 x を通る直線を L とするとき，L と M の交点の座標を x の座標を用いて表せ．

(2) M の任意の点 p に対して，f_p はただ1つの臨界点 $C(f_p)$ を持つことを示せ．

(3) 写像 $F \colon M \to N$ を $F(p) = C(f_p)$ で定義する．ここで，$C(f_p)$ は f_p のただ1つの臨界点である．このとき，F は C^∞ 級微分同相であることを示せ．

(D) X, Y を位相空間とする．以下を示せ．

(1) 連続写像 $f : X \to Y$ に対して，X の部分集合 A が連結ならば $f(A)$ も連結である．

(2) 位相空間 X の部分集合 A に対して，次は同値である．

  (a) A は連結である

  (b) A の任意の2点 x, y に対して，$x, y \in C \subset A$ をみたす連結集合 C が存在する

(3) 次は同値である．

  (a) 位相空間 X, Y は連結である

  (b) 積空間 $X \times Y$ は連結である

数学

[6] 次の (E), (F) の **両方に** 解答せよ.

(E)

$$f(z) = \frac{1}{1+z^5}$$

とする．また，正の数 R に対して

$$z = re^{i\theta} \qquad \left(0 \leq r \leq R,\ 0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{5}\right)$$

と表される複素数 z 全体の集合を D_R とする．以下の問いに答えよ．

(1) D_R を複素平面上に図示せよ．

(2) $\omega = e^{\frac{\pi i}{5}}$ とする．点 ω は $f(z)$ の 1 位の極であることを示し，点 ω における $f(z)$ の留数を ω を用いて表せ．

(3) D_R の境界に反時計回りの向きをつけた曲線を C_R とする．複素積分 $\displaystyle\int_{C_R} f(z)\,dz$ を考えることにより，次の等式を示せ．

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^5}\,dx = \frac{\pi}{5\sin\frac{\pi}{5}}$$

(F) 次の極限を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \frac{e^{nx}}{(1+x^2)(1+e^{nx})}\,dx$$

[7] 次の (G), (H), (I) のうち **1つを選び** 解答せよ．

(G) 写像 $f : [\mathbb{N}]^2 \to \{0,1\}$ について以下を示せ．ただし，集合 $X \subseteq \mathbb{N}$ に対して

$$[X]^2 = \{(m,n) \in X^2 \mid m < n\}$$

と定義する．

(1) 次の条件 $(*)$ をみたす，無限集合 $X \subseteq \mathbb{N}$ と $i \in \{0,1\}$ が存在する．

$$\text{任意の } n \in X \text{ に対して } f(0,n) = i. \qquad (*)$$

(2) 次の条件 $(**)$ をみたす，無限集合の列 $\mathbb{N} \supseteq X_0 \supseteq X_1 \supseteq \cdots$ と写像 $g : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ が存在する．

$$\text{任意の } (m,n) \in [\mathbb{N}]^2 \text{ に対して } n \in X_m \Rightarrow f(m,n) = g(m). \qquad (**)$$

(3) f が $[Y]^2$ 上で定値写像となる，無限集合 $Y \subseteq \mathbb{N}$ が存在する．

(H) Kを体とし，$\mathrm{K}[x]$をK上の1変数多項式環とする．$p \in \mathrm{K}[x]$の次数を$\deg(p)$で表す．$a,\ b \in \mathrm{K}[x]$とし，$\deg(a) \geq \deg(b) > 0$とする．このとき，$\lambda \geq 1$および多項式$r_0,$ $r_1, \ldots, r_\lambda \in \mathrm{K}[x]$, $q_1, q_2, \ldots, q_\lambda \in \mathrm{K}[x]$を次式で定める：

$$\begin{aligned} r_0 &= a, \quad r_1 = b, \\ r_{i-1} &= r_i q_i + r_{i+1}, \quad \deg(r_{i+1}) < \deg(r_i), \quad (i = 1, \ldots, \lambda - 1), \\ r_{\lambda-1} &= r_\lambda q_\lambda. \end{aligned}$$

さらに，多項式$s_0, s_1, \ldots, s_\lambda \in \mathrm{K}[x]$および$t_0, t_1, \ldots, t_\lambda \in \mathrm{K}[x]$を次式で定める：

$$\begin{aligned} s_0 &= 1, & t_0 &= 0, \\ s_1 &= 0, & t_1 &= 1, \\ s_{i+1} &= s_{i-1} - s_i q_i, & t_{i+1} &= t_{i-1} - t_i q_i \quad (i = 1, \ldots, \lambda - 1). \end{aligned}$$

以下の問いに答えよ．

(1) $i = 0, \ldots, \lambda$に対し，$s_i a + t_i b = r_i$が成り立つことを示せ．

(2) $i = 2, \ldots, \lambda$に対し，$\deg(s_i) = \deg(b) - \deg(r_{i-1})$が成り立つことを示せ．

(3) $i = 1, \ldots, \lambda$に対し，$\deg(t_i) = \deg(a) - \deg(r_{i-1})$が成り立つことを示せ．

(4) $r_2, \ldots, r_\lambda,\ s_2, \ldots, s_\lambda,\ t_2, \ldots, t_\lambda$を計算するのに必要なKの元の四則演算の回数が$\deg(a) \cdot \deg(b)$の定数倍で上から抑えられることを示せ．

(I) 確率変数X_1, X_2, X_3は，互いに独立にいずれも平均θ，分散θの正規分布に従っている．ただし，$\theta > 0$で未知とする．以下の問いに答えよ．

(1) 1次モーメントに基づいたθのモーメント推定量$\hat{\theta}_1$を求めよ．また，$\hat{\theta}_1$の平均と分散を求めよ．

(2) $T = X_1 - \hat{\theta}_1$とする．Tの従う確率分布を求めよ．

(3) θの推定量として，aT^2の形のものを考える（ただし，aは定数）．aT^2がθの不偏推定量となるには，aをどのように定めれば良いか．

(4) (3)のaに対して$\hat{\theta}_2 = aT^2$とする．$V(\hat{\theta}_2)$を求めよ．また，(1)の結果とあわせて，θの推定量として$\hat{\theta}_1$と$\hat{\theta}_2$の良さを比較せよ．