応用数学における微分方程式入門

筑波大学数学系 山崎 満

指数関数というものについて講義しますが、この指数関数というものは応用数学において現在非常に注目されています。微分方程式の解としての指数関数の一般化を考えます。

1 数の指数関数

指数関数の最も簡単な例としてねずみ算というものを考えます。ねずみ算というのは２倍、２倍に増えていくねずみのつがいの数を計算するものですが、２を何回かけるかが重要で、その数を肩に書くと次のような性質が分かります。

$$2^0 = 1, \quad 2^n \cdot 2^m = 2^{n+m}, \quad 2^{-n} = \frac{1}{2^n},$$
$$(2^n)^m = 2^{n\times m}, \quad 2^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{2}, \quad 2^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{2^m}.$$

さらに、無理数回かけるときも例えば 2^π は、

$$2^{3.14}, 2^{3.1415}, 2^{3.1415926535}, \cdots$$

という具合にして漸近値で近似します。このようにして、すべての実数 x に対して定義された指数関数 $y = 2^x$ がわかります。

さて、次に $h \neq 0$ のときに

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = 1 \tag{1}$$

となる a を求めると $a = 2.718\cdots \equiv e$（無理数）となります。

演習問題 1 はたして、*(1)* の左辺の極限は存在するでしょうか。

続いて関数の微分を考えます。(高校ですでに学習している人もいると思います。)

関数 $y=f(x)$ に対して、

$$y' = f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{2}$$

をこの関数の微分といいます。これにしたがって $y=e^x$ を微分することを考えます。

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} \\ &= \left(\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}\right)e^x \\ &= e^x \\ &= y \end{aligned}$$

これらによって指数関数の本質は以下のように書けることが分かります。

$$y=e^x \Longleftrightarrow \begin{cases} y'=y \\ x=0 \text{ のとき } y=1 \end{cases} \tag{3}$$

演習問題 2 *(1)* で述べられている事実を確証できますか。
$(\Rightarrow)$ は容易い(たやすい)でしょうが、$(\Leftarrow)$ は証明できますか。もしも、困難な点があるとすればそれは何でしょうか。

この微分方程式をもう少し拡張して $y'=ay$ とすると $y=e^{ax}$ が解になることが分かります。

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h\to 0}\frac{e^{a(x+h)}-e^{ax}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\{ae^{ax}\cdot\frac{e^{ah}-1}{ah}\} \\ &= ae^{ax}\cdot\lim_{h\to 0}\{\frac{e^{ah}-1}{ah}\} \quad (ah=j \text{ とおくと}) \\ &= ae^{ax}\cdot\lim_{j\to 0}\{\frac{e^{j}-1}{j}\} \\ &= ae^{ax} \\ &= ay \end{aligned}$$

これらによって指数関数の本質は以下のように書けることが分かります。

$$y = e^{ax} \Longleftrightarrow \begin{cases} y' = ay \\ x = 0 \text{ のとき } y = 1 \end{cases}$$

2　指数関数の展開

前節の結果をまとめると

$$y = e^{at} \Longleftrightarrow \begin{cases} y' = ay \\ t = 0 \text{ のとき } y = 1 \end{cases} \tag{4}$$

と書くことが出来ます。

演習問題 3 本当ですか。確かめてみましょう。難しいのならば、どこが難しいのか考えてみましょう。

さて、いよいよ、微分方程式を解くことを考えます。

演習問題 4 微分方程式とはどのようなものですか。2 次方程式に代表される方程式（代数方程式と呼ばれています）とは、どこが異なりますか。

解き方は、逐次近似法という方法で解となる関数の候補を次々と作っていきます。

まず、(4) の右下の条件 $t = 0$ のとき $y = 1$ から、

$$y_0(t) = 1 \quad \text{（定数関数）}$$

を選びます。これが第 0 候補です。

次に、条件 $t = 0$ のとき $y = 1$ および

$$y_1'(t) = ay_0(t) = a$$

を満たすものとして、

$$y_1(t) = at + 1$$

を選びます。これが第 1 候補です。

同様に、$y_2(t)$ を条件 $t = 0$ のとき $y = 1$ および

$$y_2'(t) = ay_1(t) = a^2t + a$$

を満たすようにとり

$$y_2(t) = \frac{a^2}{2}t^2 + at + 1$$

を得ます。これが第2候補です。
　この手順を繰り返していくと、

$$y_n(t) = \frac{a^n}{n!}t^n + \frac{a^{n-1}}{(n-1)!}t^{n-1} + \cdots + at + 1$$

が得られます。

演習問題 5 検証してみましょう。

　$n \to \infty$ とすると

演習問題 6 これは、極限という概念です。まだ、高校で習っていない人は、どのようなものか、想像してみましょう。

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}t^k \left(= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}t^k \text{の意味です} \right)$$

となります。これで完全に微分方程式を満たす形になりましたので

$$e^{at} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}a^k$$

と書けます。今までは、a は実数です。

演習問題 7 本当ですか。確かめてみましょう。

演習問題 8 上の問で、微分と極限の順序の交換をしませんでしたか。こうした、操作はいつも可能なのでしょうか。可能でないのは、どのような場合か例を作れますか。

3　行列の指数関数

今度は、バネの運動方程式

$$mx'' = -kx,\ x = x(t) \tag{5}$$

を解くことを考えます。

演習問題 9 時間を t、距離を x としたとき、速度と加速度を x の t に関する微分で表わしてみましょう。

演習問題 10 *Newton* の運動方程式から、*(5)* を導いてみましょう。

(5) において、$l = \sqrt{\frac{k}{m}}$、$y = \frac{x'}{l}$ とおくと、

$$x'' = ly' = -l^2 x$$

なので、上の運動方程式は、

$$x' = ly \qquad y' = -lx$$

と、表されます。つまり、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & l \\ -l & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{6}$$

です。

演習問題 11 *(6)* を確かめてみましょう。

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & l \\ -l & 0 \end{pmatrix}$$

とすると、

$$X' = AX$$

と書くことができ、最初にやった指数関数の微分方程式にそっくりです。

演習問題 12 *(4)* の $\Longleftrightarrow$ の右側にある微分方程式と、もう一度、見比べてみましょう。*(4)* に現れる微分方程式と異なる点はどこですか。

実際、前と同様に、

$$X' = AX \quad , t = 0 \text{ のとき } X = X_0 \Longleftrightarrow X(t) = e^{At} X_0 \tag{7}$$

が成り立ちます。ただし、e の行列乗というのは普通には考えられないので、

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \left(= \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} A^k \text{の意味です} \right) \tag{8}$$

と定義します。

演習問題 13 本当に *(8)* できちんと定義ができていますか。*(8)* の右辺の極限は収束していますか。

e^{tA} は A と同じ大きさの行列（いまの場合は 2×2 行列）です。これによって、実際にばねの運動も行列の指数関数を使って計算することが出来ます。また、(7) で述べられていることは、A は 2×2 行列でなくとも、一般に $n \times n$ 行列であれば成り立ちます。

演習問題 14 上で述べたことを想像してみてください。

4　作用素の指数関数

無限次の行列とは、$n \times n$ 行列の n が大きくなって無限大になったものだと考えて下さい。無限次の行列を考えるということは、つまり無限次元空間というものを考えるわけですが、難しく考える必要はありません。人間みな違うわけですからこの無限次元というのはむしろ自然なものです。

演習問題 15 上で述べたことは、高校で習う数学の水準をはるかに超えていますが、どのようなものか、想像してみてください。無限次元空間では、どのように行列の指数関数を構成するのが自然ですか。無限次元空間とはどのようなものですか。いろいろと思いを馳せてみましょう。

ここでは、次のような微分方程式を考えます。点 (x, y, z) における熱量を $u(t, x, y, z)$ とします。このとき u は、

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \} \quad \text{(熱方程式)} \tag{9}$$

を満たします。

$$A = a\{\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\}$$

とおくと、A は無限次の行列とみなすことができ、これを作用素と言います。

演習問題 16 これも、想像してみましょう。$\dfrac{\partial}{\partial x}$ とは、x に関する偏微分のことです。定義は、x 以外の変数を定数と思って、x に関して関数を微分したもののことです。より正確には、

$$\frac{\partial}{\partial x}u(x,y,z) = \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h,y,z)-u(x,y,z)}{h} \tag{10}$$

で、定義されます。$\dfrac{\partial}{\partial y}$ や $\dfrac{\partial}{\partial z}$ については、定義を類推してみましょう。$\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ は

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u$$

では、$\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ や $\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ については、どのように定義したらいいでしょうか。

これを使うと (9) の方程式は、

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au$$

と書けるので、その解は、

$$u(t) = e^{tA}u(0)$$

と書きたい所ですが、無限次の場合は一般に、

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}A^k \tag{11}$$

は収束しません。

演習問題 17 本当でしょうか。想像してみましょう。では、*(11)* に代わる定義として、どのような候補が考えられますか。かなりの難問ですが、思いを馳せてみましょう。

しかし、次の定理が成り立ちます。

Hille–吉田 近似
A が連続かつ線形なら作用素の指数関数が存在する。

また、これに関連して、1971 年に次の定理が得られました。

Crandall–Liggett
A が非線形の場合も、もう 1 つの条件 (消散的である) を満たせば、解が存在する。

これを用いると、物理学に現れる保存則と呼ばれる微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} f(u), t = 0 \text{ のとき } u = u_0(x)$$

に対して

Kruzkhov の定理
f が Lipschitz 連続で、u_0 が有界なら、解 u(エントロピー解) が一意に存在する。

演習問題 18 なぜ、上の解のところに（エントロピー解）とただし書きがついているのでしょうか。これは、解がただ一つに定まらないために、エントロピー条件を満たすもののみを解とするといっているのですが、そもそも、解が一つに定まらないような状況というのはあり得るのか、考えてみましょう。こうしたことは、滑らかな関数だけを考えている場合には起こり得ないことです。では、滑らかでない関数に対しては、微分はどのように定義するのが妥当でしょうか。こうした疑問の一つ一つから数学が発展してきたことを覚えておいてください。

演習問題 19 今まで習った数学の概念で、それまでの概念だけでは不十分で、概念を拡張したものがあれば、例示してみましょう。