ギャンブルの数学

筑波大学大学院数理物質科学研究科　笠原 勇二

1　はじめに

今回はギャンブルの数学という題でお話ししますが、数学の分野でいえば「確率」です。ただ、高校の数学でいう「確率」とは少し違うかもしれません。高校では予備知識の問題もあって、確率というと、実は大半が「順列・組み合わせ」の話のようです。大学の確率の授業では順列・組み合わせの話はほとんど出てきませんので、皆さんが大学に入って確率の講義をきくとイメージが随分違うと思います。

さて、ギャンブルというと日常会話では競馬競輪などいわゆる「賭け事」ばかりをイメージしてしまいますが、今日の話ではもっとずっと広く、保険・投資・宝くじなどはもとより、「今日は傘を持って出かけようか？」といった日常の小さな問題から、野球の試合で監督が「ここでピッチャーを交代するべきか？」などという問題まで、偶然性を含むものとそれに関してどのような行動や判断をするかといった問題すべてを含むと思って下さい。

でも、前もってお断りしておきますが、今日の話を聞けばギャンブルの達人になり、大金持ちになれるかといえば、残念ながらというべきか、当然というべきか、答はノーです。例えていえば、積分による体積の計算法を習っても、実際に目の前に置かれた物体の体積を求めることとの間にはギャップがあります。しかし、だからといって積分が体積の計算に役に立たないわけではないわけで、確率の話についても同様です。つまり、実際の賭け事では、それを分析し、モデル化してはじめて確率論の話が使えるわけで、その際、確率論は魔法のような必勝法を教えてくれるわけではなく、有利、不利、あるいはその程度を教えてくれるのです。それにより、合理的な判断が下せるというわけです。

普通の賭けでは、

- 合理的な賭け方をした人と幸運な人が儲かり
- 不合理な賭け方をした人と、不運な人が損をする

というのは自明なことです。しかし、運・不運は神様の領域で私達の守備範囲ではありませんから、ここでは**運・不運に関係なく成り立つことは何**

かとか、**何が合理的な賭け方か**についてだけを述べたいと思います。先回りして結論の一部を述べてしまいますと、競馬競輪などでは普通の場合、賭けないのがいいという当たり前の結論です。しかし、広義のギャンブルには「何処の大学を受験するか」といったように賭けざるを得ない場合もありますし、また、保険に入るのはひとつの賭けとみなせますが、実は保険に入らないのも別の意味で一つの賭けに違いありません。その意味で、合理的な賭けについての理論を学ぶことは有意義なことだと思いますし、今回の話を通して私の研究分野である確率論への興味を多少なりとも持って貰えれば幸いです。ただ誤解のないように付け加えますと、確率論の研究というのは大昔はともかく、現在では別にこのようなことを研究しているわけではありません。今日の話は、単に、理論の応用としてこんなことも分かりますよ、といった程度の話なんです。

さて、確率論を賭けへ応用するにあたって、重要な定理や理論がいくつかあるのですが今日は

1. **ドメレの失敗**
2. **大数の法則**
3. **マルチンゲールの理論**

の順に説明しようと思います。本当に賭けに役立つ話は最後のマルチンゲールの理論なのですが、予備知識が沢山必要なので、残念ながら深入りは出来ません。

2　ド・メレの失敗

確率論は現在の数学の中では活発な分野の一つですが、比較的新しい分野に属します。しかし、新しいといってもそれはあくまでも「数学としての確率論」の話であって、確率といった考え自体は相当古いものと思います。つまり、「賭け」は多分古代からあったはずで、賭けがある以上、確率に関する考察はいろいろあったものと思われます。しかし実際に記録に残っているものとなると、１７世紀の数学者パスカルが友人のド・メレという貴族と交わした手紙が最初で、これが確率論の発端と言われています。もっとも、これは単なる私の受け売りで、検証していませんし、また、確率論の起源については別の説もあります。

さて、フランスの貴族だったド・メレは次のような賭をしたそうです。

一つのサイコロを４回投げて、少なくとも１回は６の目を出す

この試行で成功したらド・メレが掛け金をもらい、失敗したら逆に払うという賭けです。試しにいまここで私が原稿を書きながら実際にやってみた

結果を次にかいておきます。

〇×〇××〇〇×〇〇×××××〇〇〇×〇×〇〇×〇

これは一部ですが、なんとなく勝ち負けは半々に見え、どちらが有利ともこれだけでは判断が難しいかと思います。しかし、ド・メレはこの賭けを行い大いに儲けたけれど、そのうち賭けに応ずる人がいなくなったので今度は次のような賭けに変えてみたそうです。

２つのサイコロを２４回続けて投げて、少なくとも１回は（６、６）を出す

というものです。ちょっと試しにやってみると、特にどちらが有利とも判断できません。一勝負に最大２４回投げますから結構時間がかかります。なぜメレが後の賭けで２４回という数字をもってきたかという根拠はメレさんにきいたわけではないので想像ですが、最初の賭けでは一回投げた時に６の目が出る'確率' は６分の１。４回投げるから６分の１掛ける４で３分の２。後者では（６、６）が出る'確率' は３６分の１。２４回続ければ丁度同じ３分の２の'確率' になる。という算術だったのではないかと想像出来ますが、あるいは単なる経験からかもしれません。さてその結果ですが、ド・メレはこれで**大損をした**そうです。それで知り合いの数学者フェルマーに手紙で相談し、確率論の発端になったという話です。

皆さんもうお気付きでしょうが上記の計算は勿論誤りで、最初の賭ではド・メレが勝つ確率は正しくは $1-(5/6)^4 = 0.517...$ となります 。つまり１回投げて６が出ない確率は $5/6$ ですから４回とも６が出ない確率は $(5/6)^4$。従って勝つ確率は $1-(5/6)^4$ となります。一方、後のゲームでの勝つ確率は $1-(35/36)^{24} = 0.491...$。本当に僅差ですが、0.5 より大きいのと小さいのでは大違いだった訳です。ちょっと考えると両者は僅差であり、違いは殆ど誤差の範囲に思われますが、結果的にはメレさんにとって天と地の差が出てしまった訳です。これについてはあとで「**大数の法則**」のところでもう一度触れます。蛇足ながら、上の２つの賭けの勝つ確率の差が約 2.7 パーセントというのも偶然にしては面白い数字です。何故かといいますとモンテカルロ式のルーレットではカジノ側の有利度がこの半分程度です。つまり、ド・メレさんは初めの賭けではカジノ側の役割を果たし、ルールを変えてからはカジノの客の側に立場を変えてしまったわけで、はじめは儲かったのにあとで大損をしたのもうなずけるわけです。

最近はパソコンが普及していて、エクセルなどのような表計算ソフトを使える環境も増えていますので、簡単にシミュレーション（模擬実験）をしてみましょう。

いろいろなやり方がありますが、出来るだけ一般性のあるやり方を考えましょう。まずランダムにサイコロをふる操作ですが、表計算ソフトに

限らず、多くのソフトでは乱数を出す仕組みが組み込まれています。エクセルでもメニューを探すと 1 から n まで等確率でランダムに出してくれる機能もありますが、ここではもう少し汎用性のあるやりかたをしてみます。

エクセルでは `=rand()` と入力すると 0 以上 1 未満の実数を出してくれます。エクセルを知らない人のために補足しますと、最初の `=` は「数式」であることの宣言で、`rand()` の `()` は `rand` が文字列ではなく「関数である」ことを表します。さて、こうして得られた数を 6 倍して端数を切り捨てると 0,1,2,3,4,5 が等確率で現れますから、さらに 1 を加えてやると 1 から 6 が出てきます。ここで、6 倍する操作ですが、それには`*6` とすればよく、端数の切り捨てには `int()` という関数を使います（整数を英語で integer といいます）。したがって、1 から 6 までの数を等確率でランダムに出すためには`= int(rand()*6)+1` と入力すればいいことが分かります。これが 1 回サイコロを振る操作になりますから、4 回振るにはこれをあと（横に）3 つコピーすれば一回の試行に相当します。試行を繰り返すには、これをさらに必要な試行数だけ縦にコピーすればＯＫです。ちなみに、今原稿を書きながら手元のパソコンで実験しましたところ 500 回の試行でちょうど 260 回が（ド・メレ側の）勝ちで、「半分より少し多い」という結果でした。52% ですから理論値 51.7%にかなり近い数字です。

このシミュレーションで見て頂きたいのは、勝ち負けがほぼ半々の確率に見えて実はほんのわずか有利に出来ているゲームでは、初めは運・不運によりますが、回数をこなせばほぼ確実に儲かることを見て頂けたら幸いです。

3　大数の法則

今までお話してきたことを、経験則でなく数学的に厳密に証明したのが「大数の法則」と呼ばれる定理です。その紹介のために少し準備をします。

[**期待値**]

皆さんは馬券を買ったことはないと思いますが、大体のことは見当がつくと思います。要するに、客達は勝ちそうな馬を予想して一定額で券を買い、レースの結果に従って売り上げの何割か（3/4 程度）が配当金として分配されます。サッカーくじも同じです。では、一番勝ちそうな馬（本命といいます）の券を買えばいいでしょうか？当たらなくては配当金をもらえませんから、勝ちそうな馬の券を買うのは当然と普通は考えます。しかし、次のことを考えてください。ここにサイコロがあるとします。勿論、普通のサイコロでゆがみはないとします。

「１の目が出るか、それ以外の目が出るか？」

という賭けをするときに皆さんはどちらに賭けますか？普通は「１以外の目」の方にかけますね。「当てる」という意味では当然の考えです。しかし、もし賞金が「１の目」に賭けて当たれば１万円、「その他」に賭けて当たれば百円と言われたらどうですか？大抵は「１の目」に賭けます。何故かと言うと、可能性は低くてもワリがいいからです。逆にいうと、「１以外が出れば賞金１」という賭けは勝つ可能性は高いかもしれないが、料金１００を出してまで参加するのはワリが合わないのです。さて、ここで馬券の問題に戻りますが、「前評判の高い、勝ちそうな馬」の券を買うというのでは単純すぎることが分かると思います。つまり問題は配当金です。勝ちそうな馬の馬券は大勢が買いますから、たとえ勝っても配当金は当然低くなります。逆に、勝ちそうもない馬は予想に反して勝ってしまえば、その配当金は高額になります。時として１００倍以上になったりします。したがって、「勝ちそうな馬」ではなく、「勝つ可能性」だけでなく「配当金」も考慮して馬券代に見合う賭けかどうかの判断が必要です。私の友人で、若い頃競馬で儲けていたという人がいます。彼の説明によると、競馬の予想紙を長期に調べて、予想と配当の関係をチェックし、あるお得なパターンを見つけたので、そのパターンで馬券を買って、実際に儲けていたというような話でした。ただし、努力にみあう程の儲けだったかは聞いておりません。

さて、サイコロを投げて出た目の数だけの１０円玉を貰えるという賭けをしたときあなたは幾らなら投資しますか？普通、目の平均 $(1+2+\ldots+6)/6=3.5$ を考慮して 35 円を目安にするでしょう。これが期待値です。次のような賞金の宝くじがあったとしましょう。ただし売り出し本数 100 万枚とします。

- 1 等 2 本　1000 万円
- 2 等 20 本　100 万円
- 3 等 1000 本　1 万円

このときの賞金総額は

$$2\times1000+20\times100+1000\times1=5000 \qquad (\text{単位万})$$

ですから $5,000$ 万円となります。ということは、本数 100 万で割って、１枚当たり 50 円です。初めから 100 万 で割って上の式を書き直すと

$$1000\,\text{万}\times\ \frac{2}{\text{総本数}}+100\,\text{万}\times\frac{20}{\text{総本数}}+1\,\text{万}\times\frac{1000}{\text{総本数}}=50\,(\text{円})$$

となります。ここで $\frac{2}{\text{総本数}}$ は 1 等が当たる確率であることに注意して下さい。一般に、確率変数 X が $a_1, \ldots, a_n$ をそれぞれ確率 $p_1, \ldots, p_n$ でとるとき

$$a_1 \times p_1 + \ldots + a_n \times p_n$$

を**平均値** (mean) とか**期待値** (expectation) と呼びます。平均値といってもこの場合、単純平均ではなく、いわゆる加重平均です。普通、確率変数 X の期待値は普通 $E[X]$ や $E(X)$ で表します。

[**例**] コインを 2 枚投げるとき、表が出る枚数の期待値は次のようになります。0 枚の確率は $\frac{1}{4}$, 1 枚の確率は $\frac{1}{2}$, 2 枚の確率は $\frac{1}{4}$, ですから、加重平均は

$$E[X] = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = 1$$

となります。あるいは、裏裏、裏表、表裏、表表の 4 パターンが同等に確からしく、その各々について $X = 0, 1, 1, 2$ となりますから、その単純平均をとって

$$E[X] = \frac{1}{4}\{0 + 1 + 1 + 2\} = 1$$

とやっても構いません。

この期待値がその賭けへの掛け金の妥当性への目安となります。つまり、

- 掛け金が期待値と同じであれば公平な賭け
- 掛け金が期待値少なければ有利な賭け
- 掛け金が期待値多ければ不利な賭け

といえます。もっとも、細かいことをいうと、ここで「公平」というのはあくまでも数学用語であり、ときに世間常識とは意味が違ってくる場面もあります（後述）ので、普通の感覚でいう「公平」かどうかは少し微妙な別問題です。この点については時間があればあとで触れます。

一般に、世の中に現実にある「賭け」はそのほとんどが賭ける側にとって不利な賭です。言い換えると胴元側に有利になっています。宝くじでは期待値は掛け金の半分くらいですので買う側にとって大変不利な賭けといえます。

もっとも、現実には競馬でも、あるいは金融関係でも、時として有利な賭が現れることもあります。多くの情報を集めてコンピュータで解析し、有利な状況が出現したとは瞬時に取引をするということは現実に行われています。そのときは損をすることも得をすることもあるでしょうが、沢山の取引の合計では確実に利益がでることになります。（もちろん、情報と計算が正しければの話ですが。）

上で「沢山の取引の合計では確実に利益がでる」と言ったのですが、それは次の定理に基づいています。これは確率論のもっとも重要な基礎定理といえます。

定理（大数の法則）[1] $X_1, X_2, \cdots$ を独立かつ同じ分布に従う確率変数で、その期待値を m とすると、**確率１**で次が成立する。

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = m$$

この定理の特別な場合として、次のような場合を考えましょう。ある試行で成功したら１、失敗したら０という確率変数を考えます。成功の確率を p としましょう。期待値の定義によると

$$E[X] = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p$$

ですから、この確率変数の期待値 $E[X]$ は成功の確率 p と同じです。さて、この試行を独立に繰り返した結果を $X_1, X_2, \ldots$ で表しますと $X_1 + \ldots + X_n$ は n 回の試行をしたときの成功の回数になります。例えば、成功、成功、失敗、失敗、成功は 1, 1, 0, 0, 1 と表せて、この数を合計すると 3 となりますが、これは成功の回数ですね。この成功の回数を、試行の数で割った

$$\frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$$

が成功の割合（相対頻度）となります。この確率変数に上の定理に当てはめますと、次のようになります。

定理 成功の確率が p であるような試行を独立に沢山繰り返せば、成功の割合は確率 1 で p に近づく。

ということになります。くどいかもしれませんが、運のよしあしに関わりなく、確率１で成り立つということです。この定理の意味することは何かといいますと、いまここにサイコロがあったとします。何かのゲームをやっていて、これを投げた時に１の目が出て欲しいとしましょう。でも、１の目は出ることもあるだろうし、出ないかも知れません。これは普通、運・不運でしかありません。普通と言ったのは、自分には特殊な能力があると主張する人や、インチキの出来る人も居るでしょうが、これは今の議論とは関係ないのでちょっと議論からはずしましょう、という程度の意味です。さて、１の目が出たとして、次も１が続いて出るでしょうか？これもまた、出ることもあるし、出ないこともあるとしか言い様がありません。これは「神様の領域」です。しかし、上に述べた「大数の法則」によると、２回や３回については分からないけれど、何度も何度も同じ実験を

[1]「たいすう」の法則と読みます。「だいすう」ではありません。

繰り返せば、１が出る頻度は６分の１に近づくということです。これは運不運に関係なく成立することだ、ということが数学的に証明されているというわけです。念のために付け加えますが、６分の１という数字はサイコロの歪みや、投げ方の偏りがない場合で、実際には個々のサイコロによって少しずつ違う値がでてきます。ここで、定理に戻り繰り返しますが、この主張の重要なところは「確率１で成り立つ」ことです。

さて、サイコロを投げたら１の目が１０回連続して出たとしましょう。このようなことは極めて確率の低いことですから滅多に起こることではないのですが、たまには起こらなくてならない計算です。そのときに、「大数の法則が成り立っていないではないか」などと言わないで下さい。大数の法則は、実験回数を無限大に近づけると成立するといっているわけで、１０回や２０回では結論は出せないんです。もっともっと続けていけば、ちゃんと６分の１に収束してくれます。じゃあ、一体何回ならいいんだ？と質問が出そうです。ある程度答えはありますが、残念ながら具体的に（共通の）「いくつ」といった簡単な答はありません。問題ごとに違い、一般的には、ばらつき（分散といいます）が小さいときは早く収束しますが、ばらつきが大きいケースではなかなか収束してくれないこともあります。

期待値 m の賭けを n 回繰り返すと、初めのうちは賞金総額は運がよければ「多く」、運が悪ければ「少ない」けれど、回数が増えると運の善し悪しにかかわりなく大体 $m \times n$ であるということです。ですから、期待値 50 円の宝くじを数枚買った時の賞金は運次第ですが、繰り返し買えば大体 50 円 $\times$（本数）が賞金総額になります。「何度も繰り返す」といっても実際はどのくらいかという疑問があると思います。これは既に述べたように、期待値だけではなく期待値のまわりの散らばり具合（「分散」といいます）によります。サイコロとかコイン投げでは比較的少ない回数で期待値への収束が観測出来ますが、宝くじなどのように極めて少ない確率で大きな値をとるようなタイプの賭けでは相当数の枚数を買わないと大数の法則は適用されません。

この定理をギャンブルにあてはめてみましょう。競馬では客が馬券を買いますが、売り上げの約 1/4 を主催者側の取り分として保留し、残りを「当った人」に賞金 (配当金）として払い戻します。これは、お客にとってみると不利な賭けです。もっとも、いつでも不利かと聞かれると、ちょっと微妙です。競馬の場合はサイコロと違って、「正しいモデル」が何かが自明ではないのです。つまり、何の情報も与えられていなければサイコロは歪んでいないということを暗黙の前提にして議論をせざるをえないのですが、もし、実は歪んだサイコロであったとして、そのことを知っていれば、見かけ上は不利な賭けでも、実際は有利な賭けになっていることもあるわけです。つまり、モデル（従って期待値）は与えられた情報で決まる

訳で、決して先験的にきまっているわけではないのです。本来は馬の状態とか、騎手の体調とかで確率、期待値が決まるはずですが、現実には人気だけで決まってしまうので、そこにギャップが生まれます。したがって、多くの人が誤った判断で馬券を買えば、結果的に別の馬が「掛け金より賞金の期待値が大きい」というケースも出てくるでしょう。そのようなケースを見つけた場合にのみ馬券を買えば、大数の法則によって儲かることが保証されます。ですから、競馬を長くやっているのに儲かっている人がいるからといって大数の法則の反例とはいえないのです。

パチンコなどでも、パチンコ屋さんが儲かっているので、客にとって損な賭けであることは自明なことですが、個別のパチンコ台を見ますと、客に有利な台もあるわけで、そのような台を選ぶことが出来れば大数の法則によって儲かるわけです。もっとも、この程度のことは数学を持ち出すまでもないでしょうが。

ところで競馬でノミ行為というのがあります。最近はあまり聞きませんが。これは私設の馬券売りのことで、暴力団などが資金稼ぎに行っている違法行為です。これは「買えば損。ならば、売る側に回ろう」という寸法ですね。実際、たまには大当たりの券を沢山買われてしまい、ノミ屋の側が損することもあるでしょうが、沢山の客を相手にすると大数の法則が成り立ち易いわけで、ほとんどの場合は儲かっているはずです。（これは主催者の利益を横取りするもので違法行為です。）

余談ですが、「競馬の予想屋」なる商売があります。これは「どの馬券を買えば儲かるかをプロが教えます」の口上で、予想を書いた紙片を素人客に売る商売です。本当に儲かるなら、人に教えないで自分で馬券を買うほうが手っ取り早いはずですが、それをしないで予想屋をやっているところをみると、やはり「馬券を買うより予想屋をやった方が儲かる」というのがその道のプロの認識でしょう。大数の法則というのは結構シビアに成立しているようです。

競馬と似ているようで大きく違うのが宝くじです。あれは競馬よりずっと還元率の悪い賭けです。これも詳しい数字は忘れましたが、賞金の期待値は賭け金の約半分です。賭けとしてみるとこれはかなり割りの悪い賭けですが、年末のジャンボ宝くじの季節には売り場によっては長蛇の列のできる人気ぶりです。これを数学的に考えてみましょう。まず、宝くじは賞金の分散がかなり大きいのがポイントです。ですから、大数の法則が貫徹するまでにはかなりの回数が必要です。常連でも一生の間に大数の法則が貫徹するほど何度も買うとは思えませんから、大数の法則を根拠に、「宝くじは損である」とは言い切れません。大半の客は夢を買っているわけで、数学の定理を持ち出すのは野暮と言うもの。でも、あまり沢山買うと大数の法則が待っています。ご用心。ちなみに、高額な当たりくじは本数

が少ないので、その出方は大数の法則に従いません。この時はポアッソンの小数法則という定理があり、そちらが適用され、かなり偏った不公平な出方をするはずです。

話は変わって、保険の話です。生命保険とか、損害保険ですね。これも期待値の計算で損得を議論するのは適当ではありません。普通の人はそれほど多くの試行を繰り返すわけではありませんから。

この場合は大数の法則よりミニマックスという別の原理を適用すべきです。ミニマックスとは最悪のケースに備える考え方です。つまり、幾つかの選択肢の中から、それぞれ最悪のケースを考えた中で一番いい結果をもたらす選択をしましょうという原理です。保険は最悪の場合に備えるものですから、期待値は料金の一つの目安にしか過ぎないわけです。では、保険と大数の法則は関係無いかといいますとこれが大ありです。保険に加入する側ではなく、保険会社の側から見るのです。保険会社は沢山の件数の契約をするわけですから大数の法則が間違いなく貫徹します。たとえば生命保険なら、個々人を見ていると死亡する時期は予測不可能ですが、全体としてみればほとんど確実な数字が出ます。大地震や戦争でもあれば別ですが。反面、ロケットの打ち上げのような案件は数が少ないので、保険屋のリスクが大きいといえます。

こうしてみますと、**大数の法則というのは、賭けに参加する側の理論ではなく、むしろ胴元側の論理である** ことに気がつきますね。ここで、ついでですから少し脱線しますと、じつは保険会社用の確率論としては大数の法則だけでは駄目なんです。何故かというと、破産という問題があります。つまり、いずれ大数の法則が貫徹して儲かるんだと分かっていても、その前にマイナスが大きくなって倒産してしまえばおしまいです。ですから、途中で破産しないように保険料を定めないといけません。そんなわけで、単純に、支払うであろう保険金の期待値に経費や利益を単純に上乗せしただけで保険料を決めるわけにはいきません。破産の確率まで考慮する必要があるわけです。（保険会社も再保険を掛けてはいるんですが。）破産確率の問題はそれ自身、結構面白いのですが別の機会に譲ります。

つぎに、大数の法則を体験するための簡単な実験をしてみましょう。

[**ビュフォン (Buffon 1707–88) の針の問題**]

平行線を等間隔に沢山引きます。要するに幅の大きめの罫線です。その間隔と等しい長さの針をその上にランダムに投げるとします。
このとき、**針が平行線にかかる確率** p は、$2/\pi$ となります。なぜかというと、次の図を見てください。縮尺は何でも同じですから、簡単のため針の長さと平行線の幅を 2 とします。針の中心と最寄りの平行線との距離を y とします。したがって $0 \leq y \leq 1$ です。図では針の中心が上の線より下の線に近い場合を書いてありますが、逆の時も同じです。図を逆さ

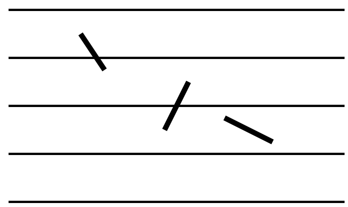

図 1: ビュフォンの針

まに見ればいいだけですから。さて、このとき、針の傾きを α とします。$0 \leq \alpha < \pi$ とします。π は弧度法の表記で、180 度と同じ意味です。針の先の方向まで考えて $0 \leq \alpha < 2\pi$ と考えても構いませんが、向きを考えずに $0 \leq \alpha < \pi$ とした方が簡単です。

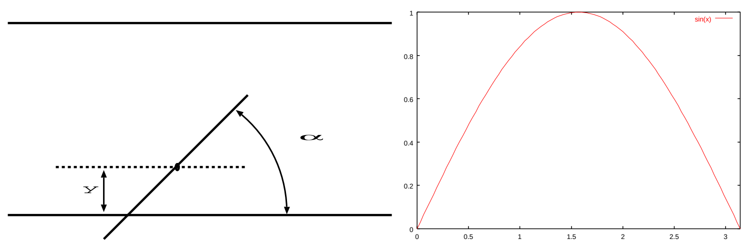

図 2: 針が平行線にかかるのは、右図でいうと

このとき、針が平行線にかかるのはどのような時でしょうか。まず、上側の線より下側の線に近いという仮定から、平行線にかかるというのは下の線にかかるのと同じことです。針の下半分の長さはちょうど１としたので、その**縦軸方向の成分の長さ**は $\sin\alpha$ です。したがって、これが交わるというのは

$$\sin\alpha \leq y$$

と同じことです。ランダムに針を落とすというのは、針の中心を 0 から 1 の間に、また傾きを 0 から π （１８０度）の間にそれぞれランダムにとることと同じと考えます。右の方の図では 縦 1 横 π の長方形と $\sin\alpha$ のグラフがかいてあります。したがって、「ランダムに針を落とす」ことは「この長方形からランダムに一点を選ぶ」のと同じで、「針が平行線と交わる」のは

長方形の中から選ばれた点が $\sin\alpha$ のグラフの下にある
ことと同じです。よって、求める確率は

$$p = \frac{\text{（グラフより下の部分の面積）}}{\text{（長方形の面積）}}$$

となります。グラフの下の面積は積分で表せますし、長方形の面積はもちろん π ですね。よって

$$p = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{1}{\pi}\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

となります。角度の弧度法や三角関数の積分はまだやってないかもしれませんから、この計算自体は今回あまり気にしないでください。

さて、もとの問題に戻ります。N 本の針を投げて n 本が平行線にかかるとき，N を大きくすると n/N は大数の法則により $p = 2/\pi$ に近づくはずです。したがって、$2(N/n)$ は π に近づくことになります。このことにより**針を投げる実験により円周率 π の近似値を求める**ことができます。もちろん、その近似値の精度をあげるには、回数を増やせばいいのです。どの程度増やせば精度がどの程度上がるかは重要な（面白い）話ですが、ここでは割愛します。

理屈だけではつまらないのですが、これを実際にやってみるのは時間と手間がかかります。幸い、現在では計算機でシミュレーションするにはもってこいの問題ということで、いくつかのＷＥＢサイトで遊べますから、皆さん検索してやってみてください。「ビュフォンの針」で検索すればいいでしょう。実験では、少ない回数だといろいろな値が出ますが、回数を増やすと一定値に収束することをみて頂きたいと思います。

もう一つ似たような話ですが、実験で円周率の近似値を求める簡単な方法があります。一辺の長さが 1 の正方形を考え、その一つの頂点を中心とする半径 1 の円を書きます。この正方形の中から一点をランダムに選ぶと、この円（実は四分の一円）の中に落ちる確率はその面積 $\pi/4$ に等しくなります。従って、N 回実験したうち、n 回この円の中に落ちれば、n/N は $\pi/4$ に近づきます。すなわち、π は $4n/N$ で近似出来ることになります。この実験はエクセルで簡単に出来ますね。先ほどと同様にして `=rand()` を使って二つの乱数を出して、その二乗の和が 1 より小さいかどうかを調べればいいわけです。

4　ペテルブルグの逆理

次に「ただし、期待値を過信するな」という話です。ペテルブルグの逆理という有名な話です。こんなゲームを考えます。コインを投げて初めて表が出るまでの回数を数えます。そしてそれが n 回だったとき、2^n 円の賞金が出るとします。最初に表が出たらそれでおしまいで賞金は 1 円。また裏表となったら 2 円。裏裏表だったら 4 円。裏裏裏表だったら 8 円です。

このときの賞金の期待値は

$$2^0 \times \frac{1}{2} + 2^1 \times (\frac{1}{2})^2 + \ldots + 2^n \times (\frac{1}{2})^n + \ldots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots = \infty$$

ということで、無限大になります。ということは、掛け金をいくらにしたら「公平」になるかというと、「無限大」ということになります。つまり、掛け金がいくら大きくてもこれは賭け人に有利な賭けです。しかし現実問題としてこのゲームにいくら投資しますか？ちょっとやって見ましょう。実際にやってみるといくら期待値が無限大だといっても１万円どころか１０００円だって払う気にならないハズです。そうすると「大数の法則によると回数さえ増やせば、確率１で儲かる」というのはどうなったんだということになります。これに対する答えですが、思い出して欲しいのは「回数を大きくすれば」という言葉です。この回数は「分散」が大きくなればそれにつれて「回数」も大きくしなくていけません。じつは今のケースは分散も無限大になっているので必要な回数が桁違いに大きく、朝から晩まで毎日ゲームを繰り返しても大数の法則が成立するまでに一生掛かってしまうでしょう。実はもっと深刻な問題があります。時間はあっても、途中で掛け金が底をついて中止せざるを得ないことです。そんなわけで、単純に大数の法則を適用するのは問題です。今の問題については実は

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n) = \infty$$

ということで、平均賞金額は無限大に発散するのですが、現実と合う話にするためには、これが「どのくらい早く無限大に発散しているか」を調べる必要があります。細かい計算は省略しますが、次のことが証明出来ます。

$$\frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n) \approx \log_e n.$$

ここで e は自然対数の底と呼ばれる数で、$2.71\ldots$ です。例えば $\log_e 1000 \approx 6.91, \log_e 10000 \approx 9.21$ です。

次も似たような話です。宝くじの賞金の期待値は掛け金（代金）の半分しかありません。これは非常に不利な賭けといわざるを得ません。では、宝くじを買うのは非合理的な愚かなことでしょうか？実は、これは単純には答えられません。もうお分かりと思いますが、ばらつき（分散）が非常に大きいので大数の法則をあてはめてもしかたありません。宝くじを買う人は大数の法則が成り立つ前の幸運を狙っているわけです。ばらつきの大きさを買っているわけです。ですから、言えることは「あまり大量に宝くじを買うと大数の法則が成り立つ方向に行きますから、損が次第に確実になります」ということです。蛇足かもしれませんが、このことを念頭に、「宝くじのグループ買い」は合理的か考えてみてください。

5 マルチンゲールの理論

残った時間でマルチンゲールの理論について少しお話ししましょう。これは大数の法則に比べてずっと複雑な話で、高級な話なんです。詳しい話というか、ちゃんとした話をしようとすると大学どころか大学院レベルの予備知識が要りますから、ここでは曖昧な話で済ますことにならざるを得ないので残念ですがやむをえません。ここでは感覚的に理解してもらえれば結構ですが、「微分積分の話の先にはこんな話がある」と興味を持ってもらえれば、これもまた幸いです。

マルチンゲールという言葉の語源はアラブの賭け (の方法) からきているそうですが、数学的には**公平な賭け**の数学モデルです。「科学の啓蒙書では数式が１つ増える毎に読者が半減する」という経験則があるそうですから、数式はあまり使いたくないのですが、今日は数学に興味のある皆さんでしょうから、ちょっと付き合って下さい。$Y_1, Y_2, \ldots$ を確率変数の列とします。Y_k は第 k 回目の賭けの後の所持金と思って下さい。ですから先程と違って、一般には独立確率変数の列にはなっていません。さて、k 回目の賭けが終了したとしましょう。この段階で、$Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ は確定したわけです。そこでもう１回 ($(k+1)$ 回目ですね) 賭けに参加したとしたとすると、その後の所持金が Y_{k+1} ですが、これは今の段階では確定しませんから、どんな確率でどんな値になるか、ということしかわかりません。そこで、その期待値を計算します。その期待値というのは $E[Y_{k+1}]$ ではなく、過去および現在、すなわち $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_k\}$ が与えられたときの条件付き期待値 $E[Y_{k+1}|Y_1, \ldots, Y_k]$ のつもりです。（この厳密な定義には積分論が必要ですから、詳しくは述べません。）この、“現在までの情報が与えられたときの、条件付き期待値” $E[Y_{k+1}|Y_1, \ldots, Y_k]$ が Y_k に等しいという性質が、各ステップ k について成り立っているときマルチンゲールと言います。ちょっと分かり辛いでしょうか。つまり、各ステップで、「次のゲーム後の所持金の期待値は現在の所持金に等しい」ときマルチンゲールといいます。例として、コインを投げて、

- 表が出たら掛け金が倍になって戻ってくる
- 裏が出たら掛け金を没収される

という賭けを考えましょう。すぐに分かると思いますが、歪みのないコインという前提があれば、これはマルチンゲールになります。なお、

$$Y_k = E[Y_{k+1}|Y_1, \ldots, Y_k], \qquad k = 1, 2, \ldots$$

がマルチンゲールの定義でしたが、これを不等式にして

$$Y_k \geq E[Y_{k+1}|Y_1, \ldots, Y_k], \qquad k = 1, 2, \ldots$$

とした不等式が成り立つ時、優マルチンゲールといいます。もうおわかりでしょうが、これは不利な賭けの数学モデルです。上の例で、コインが歪んでいて、実は裏が出易くなっているとこれは不利な賭けで、優マルチンゲールになります。不利な賭けなのに何故「優」なのだ？という疑問が出るのではないかと思います。これは数学に「優調和関数」という概念があり、それとの類推からは「優」といういう言葉が自然なのです。あちらを立てればこちらが立たずということでやむを得ないのです。もっとも、胴元側から見れば「優」で構わないですね。なお、上の不等式の向きを逆にすると「有利な賭け」の数学モデルになりますが、これを劣マルチンゲールといいます。優・劣マルチンゲールの不等式には等号も含まれていますから、マルチンゲールは優マルチンゲールでもあるし、劣マルチンゲールでもあります。

さて、賭け（優または劣マルチンゲール）において、うまい賭け方があるかという問題でしたね。勝ち逃げが可能かという問題を考えてみましょう。「今は儲かっているんだけど、もう少し続けるべきか、ここで止めたほうがよいだろうか」という問題です。もう少し一般にいうと、「所持金の増減を観察しながら適当な時に賭を停止する場合、どのような戦略を取るのがベストか？」という問題です。勿論、止めるかどうかは現在および過去の情報だけで決定しなくてはいけないのは言うまでもない前提です。このような「止め時」を「マルコフ時間」と言います。後になって「あの時に遡って止めておきたい」などという、いわゆる「マッタ」は当然ながら許されないわけで、それはマルコフ時間ではありません。「損する１回前」などというのはマルコフ時間ではなく、「２回連続して最大値を更新した時点」などはその時点までの情報だけで特定出来ますから、マルコフ時間であることはもうお分かりでしょう。野球のピッチャーの交代時期もマルコフ時間でないといけないルールです。さて、上の、止め時に関する問題の答が次の定理です。本当はもっと詳しい主張なんですが、いまは単純化してしまいます。

[**任意抽出定理**]

賭けの回数に制限のあるマルチンゲールにおいては、どのようなマルコフ時間による止め方をしても、所持金の期待値は、当初の所持金に等しい。優 [劣] マルチンゲールにおいては、どのようなマルコフ時間による止め方をしても、所持金の期待値は、当初の所持金以下 [以上] である。止め時が後になればなる程、期待値は（広義の）減少 [増加] である。

もう結論が出ました。公平な賭けにおいては、必勝法はありません。「５回続けて勝ったらそこで止めよう」とか、「２回連続して失敗したら止めよう」などという戦略をいろいろ考えてもやっぱり駄目なんですね。ついでながら、不利な賭け (優マルチンゲール) においては期待値でみるかぎ

り、出来るだけ早くやめるのが得で、本当は最初から**降りる**のが一番、という当たり前の結論が数学的に証明されているわけです。ここでちょっと注意しますと、「賭けの回数に制限のある」という仮定は重要です。回数に上限がないときは別の結論が出てきます。なお、劣マルチンゲールは有利な賭けの数学モデルといいました。そんな賭けは現実にはあまりお目に掛かれませんが、そのときは破産しないようにだけ気を付けてゲームを続けていれば得になるわけです。

賭けについては、まだまだ色んな話があります。bold playing の原則だとか、重複対数の法則とか、最適選択の問題とか、面白い話が残っていますので、時間があったらお話ししようと思います。

参考文献

W．フェラー　著、河田龍夫　監訳「確率論とその応用」Ｉ，　（各上下２巻)、紀伊国屋書店