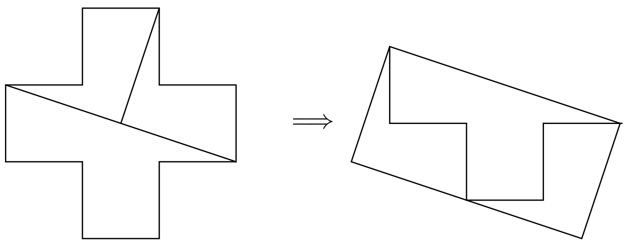
切ったり貼ったり
— デーンの定理とその周辺 —
問題への解答例

1　虫食いテーブルクロス

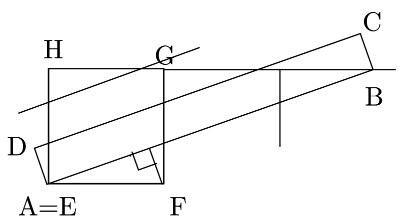
問題 1.1. 同じサイズの正方形を 5 つ集めてできた十字の形をした布を 3 つに切り，再び貼りあわせて辺の比が 1 対 2 の長方形にするにはどうすればいいか？

解答 1.1.



2　分解合同

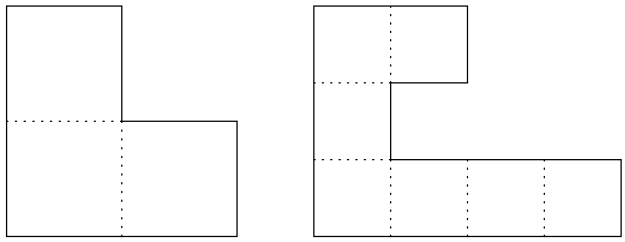
問題 2.1. 下の図では，長方形 ABCD を正方形に近い形 EFGH に変えるのに 5 枚の断片に切っている．では，この方法で一般に $a \times 1/a$ の長方形を面積 1 の正方形に変えるにはいくつに切ればいいか？ $a > 1$ として考えよ．



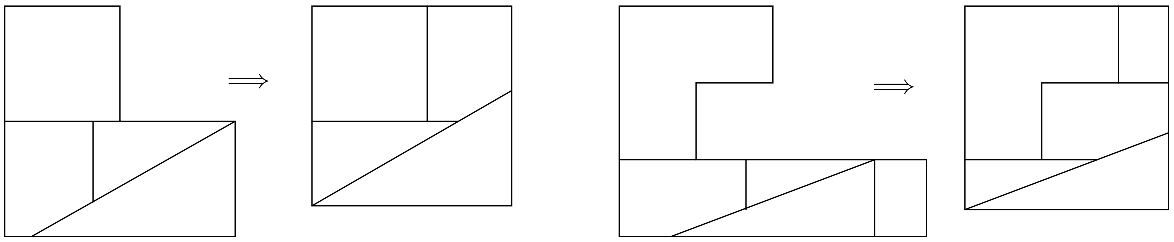
解答 2.1. x 以上の最小の整数を $\lceil x \rceil$ と書くことにすると，断片数は $\lceil \sqrt{a^2 - 1} \rceil + 2$ である．a が小さいときの断片数を表にすると，次のようになる．

$$
\begin{array}{ccc}
1 < a \le \sqrt{2} & \cdots\cdots & 3 \text{ 片} \\
\sqrt{2} < a \le \sqrt{5} & \cdots\cdots & 4 \text{ 片} \\
\sqrt{9} < a \le \sqrt{10} & \cdots\cdots & 5 \text{ 片} \\
\sqrt{10} < a \le \sqrt{17} & \cdots\cdots & 6 \text{ 片}
\end{array}
$$

問題 2.2. 下は正方形をいくつか集めてできた図形である．切り貼りして，それぞれ形を正方形にせよ．



解答 2.2.

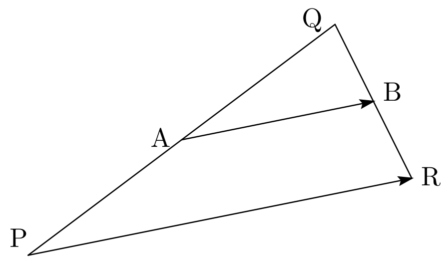


断片数はそれぞれ最小と思うが，もっと断片数の少ない解がないという確証はない．(そのような解を募集します．メール宛先 `ksakai@math.tsukuba.ac.jp`)

3　点対称と平行移動

問題 3.1. 平面上の図形を，最初は点 A を中心にして対称に移動し，続いて点 B を中心にして対称に移動すると，結局，A から B の方向に AB の 2 倍の距離だけ平行に移動することを証明せよ．

解答 3.1. 平面上の点 P を任意にとり，P の A に対する対称点を Q，Q の B に対する対称点を R とする．このとき A は PQ の中点，B は QR の中点だから，図から分かるように ベクトル PR はベクトル AB の 2 倍である．

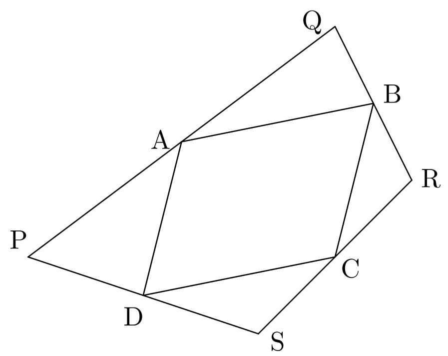


P を最初にどこにとっても，この関係は変わらないので，すべての点が AB 方向に AB の 2 倍の距離だけ移動する．

問題 3.2. 平面上の図形に，点 A，B, C を中心にする対称移動を続けて行っても，1 回の対称移動をしたのと同じことになる．この対称移動の中心はどういう点になるか？

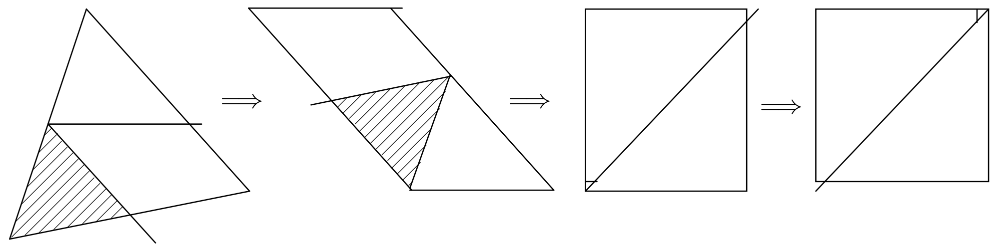
解答 3.2. この対称移動の中心を D とすると，D は AC の中点に対して B と対称である．つまり ABCD は

平行四辺形で，その理由は，図を見れば分かるであろう．



問題 3.3. 勝手な方向に置かれた同じ面積の正三角形と正方形が，互いに S-分解合同であることを図で示せ．

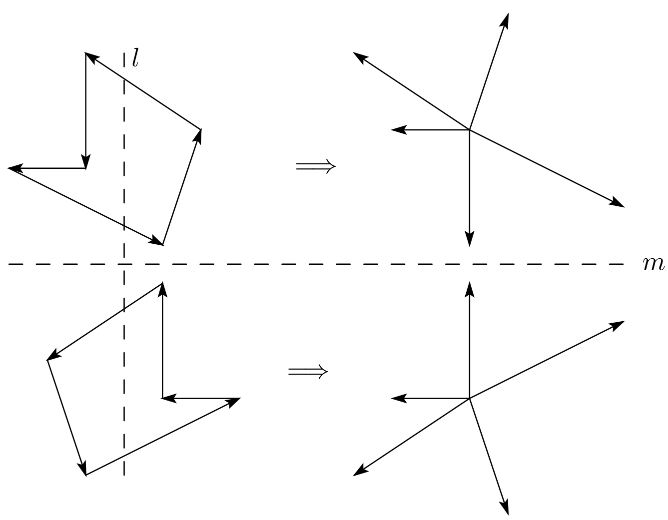
解答 3.3. それぞれが置かれている向きにより異なるが，概略次の手順でうまく行く．斜線の三角形は $180°$ 回転される．



4 周ベクトル図

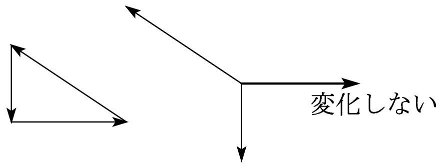
問題 4.1. 布地の両面に同じ矢がすり模様があるとすれば，裏返すという操作が一定方向の軸に対してなら許される．その裏返し操作で周ベクトル図はどう変化するか？

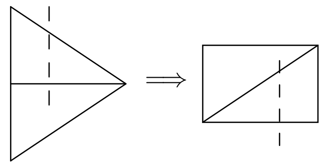
解答 4.1. 図形の裏返しに使った軸を l とすると，周ベクトル図は l に直交する軸 m を中心に裏返る．図で確認すると次のようになる．



問題 4.2. 平行移動のほかに一定方向の直線を対称軸にして多角形を裏返す操作が許されたとしたら，同面積の多角形はどれも分割合同になるだろうか (ヒント: 周ベクトルのうち対称軸に対して垂直なものだけを考えよ)?

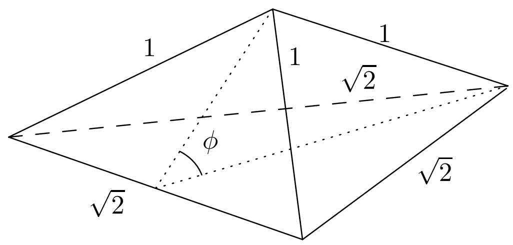
解答 4.2. 例えば対称軸が垂直方向の場合，前問で見たように水平方向の周ベクトルは，裏返しても全く変化しない．従って，水平方向の周ベクトルを持つ左図のような多角形は，平行移動や垂直な軸での裏返しで長方形と分解合同になることがない．逆に，水平方向の裏返しで互いに消しあえるような周ベクトルを持つ右図のような多角形は，垂直な反転を使うと長方形と分解合同になることがある．



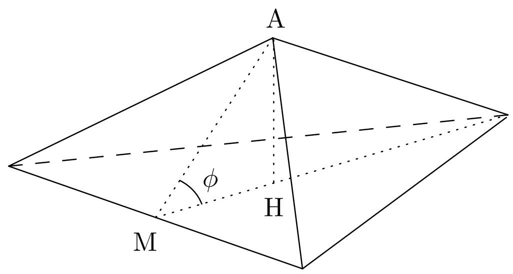


5　6 分の 1 升

問題 5.1. 立方体の角を切り落とした図のような三角錐の底面と側面のなす角 ϕ について $\cos\phi$ を求めよ．それを用いて ϕ が $360°$ の有理数倍でないことを証明せよ．



解答 5.1. 三角錐の頂点 A から底面におろした垂線の足を H，底辺の中点を M とすると，



H は底面の正三角形の重心だから $\mathrm{MH} = \sqrt{2} \times \sqrt{3}/2 \times 1/3$．また，明らかに $\mathrm{MA} = \sqrt{2}/2$．よって

$$\cos\phi = \frac{\mathrm{MH}}{\mathrm{MA}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

次に ϕ が $360°$ の有理数 p/q 倍 (p は整数，q は正の整数) だとすると，矛盾することを示す．$q\phi = 360p°$ より，$\cos q\phi = \cos 360p° = 1$．ところが，正の整数 q に対して，$\cos q\phi$ は $n/(\sqrt{3})^q$ (nは3で割り切れない整数) の形になることが数学的帰納法によって次のように示され，従って整数にはなりえない．$q = 1, 2$ の時は，$\cos\phi = 1/\sqrt{3}$，$\cos 2\phi = 2(\cos\phi)^2 - 1 = -1/3$ より，明らかである．$\cos(q-1)\phi = m/(\sqrt{3})^{q-1}$，$\cos q\phi = n/(\sqrt{3})^q$ とすると，三角関数の和と積の交換公式より，

$$\cos(k+1)\phi + \cos(k-1)\phi = 2\cos k\phi \cos\phi$$

だから,

$$\cos(k+1)\phi = 2\cos k\phi\cos\phi - \cos(k-1)\phi = \frac{2n}{(\sqrt{3})^{q+1}} - \frac{m}{(\sqrt{3})^{q-1}} = \frac{2n-3m}{(\sqrt{3})^{q+1}}$$

により $\cos(k+1)\phi$ も同じ形をしていることが分かる. (n が 3 で割り切れないから $2n-3m$ も 3 で割り切れない.)

問題 5.2. f が

$$f(\alpha+\beta) = f(\alpha) + f(\beta), \quad f(360^\circ) = 0$$

を満たすとする. q が有理数なら $f(q\alpha) = qf(\alpha)$ であることを示せ. よって, α が 360° の有理数倍であれば, $f(\alpha) = 0$ である.

解答 5.2. まず $f(\alpha) = f(0+\alpha) = f(0)+f(\alpha)$ より, $f(0\alpha) = f(0) = 0 = 0f(\alpha)$ である. さらに自然数 n に対して, $f(n\alpha) = f((n-1)\alpha+\alpha) = f((n-1)\alpha)+f(\alpha)$ だから, 数学的帰納法により $f(n\alpha) = nf(\alpha)$ が証明できる. 負の整数 $-n$ に対しては $0 = f((-n)\alpha + n\alpha) = f((-n)\alpha) + f(n\alpha)$ より, $f((-n)\alpha) = -f(n\alpha) = (-n)f(\alpha)$. 最後に一般の有理数 $q = m/n$ (m は整数, n は正の整数) に対しては, $nf((m/n)\alpha) = f(n(m/n)\alpha) = f(m\alpha) = mf(\alpha)$ より, $f(q\alpha) = f((m/n)\alpha) = (m/n)f(\alpha) = qf(\alpha)$ である.