円周率をめぐる御伽噺

増田哲也*

…ここでは時間がとてもゆったりと流れている…

概 要

事の起こりは秋のとある日の事である。僕はいつもの様に数学科のお茶のみ場でボケーッとしていた。そこへふいに某大先生が現れた。

大先生：「あっ増田君、丁度良かった。今君を探していた所だったんだよ。次の体験学習は君に任せたよ。いよいよ君の番だから覚悟してね。」

僕　：　…これはどえらい事になってしまった。とうとう僕の番か。しかも高校生が相手とは。これは責任重大。でも僕は講義がとても苦手なんだよなー。あーあ、どうしよう。…「(でもー…)はい、喜んでやらせていただきます。ただあのーそのー僕は、ここここ、こういうのはとても難しいので…」

大先生：「大丈夫だよ増田君、君の原稿は僕がちゃんとチェックしてあげるから何とか出来るだろう。しっかりとやりたまえ。」

てな訳でとうとう僕が引き受ける事になりました。「頑張りまーす !!」のだけど、今時の高校生は数学の何処が理解出来ないかが僕には判らないので、何か判らない事があったらどんなアホな質問でもバシバシどうぞ。ヨロシク。

0　円周率とは一体何だったのだろうか？

皆さんは学校で円周率をどう理解したのだろうか？　僕の場合は（とは言っても随分と昔の話なので忘れてしまったけれど）「円周率はコレコレと覚えなさい」と頭ごなしに教えられた様な記憶で、説明を求めるとそれはいい加減というか何と言うか支離滅裂というか、どうしても納得が出来なかった。そんな訳でかなりしつこく数学の先生の所に質問に行ったという記憶がかすかに残っているのみだ。この事についてどんな風に質問したのかはもはや記憶のかなたに忘れ去ってしまったが、その数学の先生はそこいらの公式やら何やらを適当に持ち出すだけで、その説明は僕にとっては全く理解し難く、僕は完全に落ちこぼれてしまった…（もっとも僕は学校の勉強は面白くなかったから全部シカトしていたので、僕が落ちこぼれていたのは数学だけではなかった。）しかし、そんな僕の少年時代の暗い話は別として円周率についてちょっと考えてみる事としよう。

そこで取り敢えずは次の様な問題を考えてみる。そもそもこれらが数学の問題としての形なり意味をちゃんとなしているかどうかを先ずは疑ってかかってみよう。人の話を鵜呑みにしないで欲しい。

円周率の定義：其の１

直径１の円の円周を考える。そしてその円周の長さを π_1 とする。

円周率の定義：其の２

半径１の（中が詰まった）円盤を考える。そしてその円盤の面積を π_2 とする。

そこでいよいよ問題である。この二つの数であるところの π_1 と π_2 とは本当に等しいのだろううか？　また等しいとしたらその理由は何だろうか？　或いは違うという考え方があっても良いと思うが、その場合にはその理由は？　さて皆さんはどんな風に考えるのであろうか？

*筑波大学数学系、パリのとあるアパルトマンにてコピーヌと街の景色を眺めながら

取り敢えずの問題はこれだけだけれど、皆さんはこの「問題」に対してどう答える事が出来るのであろうか。僕の想像だが、大方の皆さんは次の様に考えるのではないだろうか。

説明（らしきもの）

先ず第 1 の定義に関してであるが、いわゆる公式とやらを使えば円周の長さは

$$\ell = 2\pi r \qquad \text{但し } r \text{ は円の半径}$$

だから、半径 r が $1/2$ という事から円周の長さ ℓ が π になるのはどう見ても当然であろう。但しここで使われている π という数が何処から来たものかは差し当たっては深くは問わない事とするという暗黙の了解事項は恐らく守らなければならないのであろう。次は第 2 の定義であるが、再びいわゆる公式とやらに拠れば円盤の面積は

$$S = \pi R^2 \qquad \text{但し } R \text{ は円盤の半径}$$

であるからして、今度は半径 R が 1 だという事から円盤の面積 S は π に他ならない。また再び π の出所は問わない事にしなければ答まで辿り着けないのでそれは「良い事」にする。すると答はいとも簡単で $\pi_1 = \pi_2 = \pi$ である。

取り敢えずの説明

先ず円周率の「定義」であるが、直径 1 の円の円周の「長さ」が数として確定するという大前提の基に、その値を円周率 π とする。（直線ではないものの長さが「何であるか」は問わない事とする。）つまり半径が $1/2$ であればその円周の長さは π であるから、半径が r 倍になれば円周の長さも r 倍になるという様な議論（「相似」というやつ）を使えば半径を r とした時の円周の長さ ℓ を与える公式：

$$\ell = 2\pi r$$

が得られる。そんでもって次は半径 R の円盤の面積 S であるが、例えばこんな風に考えてみる事とする。半径 R の円盤があったらそれを半径 $r,\quad 0 \le r \le R$ の円周（であってほんの僅かの厚さ $\Delta r = dr$ を持ったもの）の集まりだと観るという「説明」に納得して貰えるだろうか。もしそれがオッケーなら、それらを全部寄せ集める、即ち積分して

$$S = \int_0^R 2\pi r dr = \pi R^2$$

となる。これは皆さんにとって納得出来る説明であろうか？　実はこれに似た話があるのだが、それは後回しとしておこう。

そんでもって僕のこだわり

僕は「数学者まがい」を長くやっているせいか、こんな一見してしょーもない問題にしつこくこだわってしまう。数学者（と言うよりも僕）の「悪い癖」なのであろうか。ここでは僕のごく個人的なこだわりを幾つか列挙してこの節を終える事としよう。

- 「円周率」という数はどんな数の世界で認識されるのだろうか？
- 円周率 π という数はどの様に定義されるのであろうか？
- そして π という数は具体的にはどの様に計算されるのであろうか？
- そもそも円周の様な曲線の長さはどうやって決めるのか？
- そもそも円周の様な曲線で囲まれた図形の面積はどうやって決めるのか？
- そして上で使った公式達は一体何処から来たのであろうか？
- π_1 と π_2 は「量」なのか、それとも「数」なのか、どっちだろう？

1　代数学から観ると。

（現代）数学で使われている数の世界には色々な種類があるが、取り敢えずは自然数全体の集合から議論（実はゲームとでも言おうか）を始めるのが通例となっている。ここを真剣に疑ってかかるという立場もあろうが、ここでは良い事とせざるを得ない。其処を説明するには僕の力量が完全に不足している。全く申し訳が無い。それでと言っては何だが、自然数全体の集合に $\boldsymbol{N}$ という記号を使う約束事の説明で勘弁してもらう事とする。取り敢えずの我々の了解事項として次の事実を確認しておく事としよう。

$$\boldsymbol{N} := \{1, 2, 3, \cdots\}$$

但しつまらないコメントをしておくとここには幾つかの流儀があって、例えばフランスの数学者集団であるニコラス・ブルバキの流儀では $\boldsymbol{N} := \{0, 1, 2, \cdots\}$ であるし、また偉大な日本人数学者として世界的に知られている佐藤幹夫大先生（現存の数学者。一応人間の姿形をしてはいるが、どう見ても生身の人間ではなさそうである。こういうのを「数学の神」とでも言うのであろうか。）もブルバキと同じ流儀を使っておられる。然して僕はブルバキー佐藤の流儀を何時も使っているが、これはどうも大方の流儀とは違っている様子なので、差し当たっては忘れても良い事とする。いずれにしてもこれはたかが記号の約束事と言うか名前のつけ方程度の話であるから事の本質には全く関係が無い。

さて自然数全体の集合 $\boldsymbol{N}$ が与えられたとしても円周率 π がこの集合に属さないのは「ほぼ明確」であろう。何故ならば円周率 π は $3.1415\cdots$ とか何とか訳の判らない数だからである。

とてもいい加減な議論をすると

半径 1 の円盤を内側と外側から正方形で挟むと $2\sqrt{2} < \pi < 4$ となる事が観察されるであろう。然して π は 3 とは違うと大先生を含めて、多くの人達が言っていたから π は自然数ではない !!

演習問題１（大先生：こんなのはとても簡単だ。君達もやってみよう。）
上の議論を図を描いて（面積の議論から）確かめてみよう。

其処で自然数では事が収まらないので次は整数全体の集合 $\boldsymbol{Z}$ を考える事になるが、実際は自然数全体の集合 $\boldsymbol{N}$ から具体的に構成するという方法を取るのが普通だという事になっている。実際の「代物」は

$$\boldsymbol{Z} = \{\cdots -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$$

である事位は皆既に充分承知ではあろうが、これは現実がこうなっているという事を式に書いているだけであって整数全体の集合 $\boldsymbol{Z}$ をきちんと数学的に定義した事にはなっていない。其処で実際はどうするのかをかなり大雑把にではあるが説明すると、先ず集合 $\{(n, m) : n,\ m \in \boldsymbol{N}\}$ を考える。それで、それを「同値関係 $\sim$」とやらで「割った」もの）と言うような感じのものと言わざるを得ない。即ち、

$$\boldsymbol{Z} := \{(n, m) : n,\ m \in \boldsymbol{N}\}/\sim$$

ここで実際は何を「観ている」のかと言うと、それは $n - m$ である。引き算が未だ定義されていない世界で仮想的に自然数の組 (n, m) を $n - m$ だと思って整数を理解するという方法を取る。これでまあ取り敢えずはこれで整数全体の集合 $\boldsymbol{Z}$ を理解した積もりになって貰うしか無い。ここで恐らく「同値関係」のより詳しい説明が必要かもしれないが、取り敢えずは先に進む事としよう。然しもし話の途中でここが詳しく知りたいという聴衆が居たら僕はとても嬉しい。その時は話を脱線する事としよう。僕の話は何時も脱線しているからだ。

所で何が言いたかったかというと、これだけの枠組みでは円周率を理解する事が出来なかったので、更なる数の概念の拡張するはめになってしまったという経緯があったという話である。そこで次は有理数全体の集合 $\boldsymbol{Q}$ の登場である。ここでつまらない理屈をこねると、整数全体の作る集合である所の $\boldsymbol{Z}$ は環という構造を持つ事が知られている。（しかも $\boldsymbol{Z}$ は最も普遍的な環である。数学者はこういう言葉使い

が大好きである。）そうすると局所化とか何とか、専門用語を使って有理数全体の集合 $\boldsymbol{Q}$ を理解したという取り決めを交わし、判った事にする。これも少々面倒なので取り敢えずは説明を勘弁してもらいたいが、脱線は勿論大歓迎である。局所化とか何とか、専門用語などどうでも良い。実際に創ってみせる事が出来るのであるからいずれにしてもそんなたいそうな話では無い。もっとも有理数というものがおおよそどんなものであるか位は皆さんは何となくは知っているであろう。

面倒な理屈を抜きにすると、要するに有理数全体の集合 $\boldsymbol{Z}$ というのは集合

$$\left\{\frac{n}{m} : n,\, m \in \boldsymbol{Z},\, m \neq 0\right\}$$

を考実数の世界の中でえてそれを前とは別の「同値関係」とやらで「割った」ものと言うような感じのもの、と取り敢えずは言っておこう。

そんで、有理数全体の集合 $\boldsymbol{Q}$ を我々はめでたく手にしたという事にしておこう。取り敢えずここ迄は良い事としても、円周率を閉じ込める事が出来る「檻」はこれでは未だ不充分なのである。

挑戦問題２（大先生：かなり難しいけれど数学科の大学院とかへ入れば判る様になるかも。）
円周率 π が有理数ではない事を証明してみよう。

そんでもって次の拡張である。この新しい檻である所の $\boldsymbol{Q}$ は実は滅茶苦茶スカスカで、円周率とか何とか数、かんとか数はおろか、例えば２の平方根 $\sqrt{2}$ みたいな一見初等的な動物達さえ入っていない。まだ他にも初等的な動物達が沢山居る事は皆さんも良く知っているであろう。例えば $\sqrt{3}$ とか $\sqrt{5}$ とか $\sqrt{7}$ とか、そんな動物達である。有理数ではないが、しかしさりとてそんなに厄介な動物達でもない。「○▲理論」とか「×■理論」たら、まあそんなもので理解した積もりになる事は一応出来る様になっている。

演習問題３（大先生：こんなのは簡単だよーん。やってみなー。）
$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、$\sqrt{5}$、$\sqrt{7}$、とかが有理数ではない事を証明してみよう。

ここで少々の理屈をこねると、例えば適当な整数の平方根位であれば有理数全体の集合 $\boldsymbol{Q}$ の二次拡大とか言ってるものに入ってしまう。これ位の話は大学の数学科に進学すれば十分理解出来るであろう。でもこの手合いの数を全部いっぺんに檻に入れようとするととたんに「とんでもない檻」を用意する必要がある。そもそも有理数全体の集合 $\boldsymbol{Q}$ は体という「構造」を持つ。名前は一見いかめしいかも知れないが、体という概念は現代数学の極めて美しく、かつ深淵な話へと繋がって行く。ここではこれ以上深入りしない。さもなくばせっかくの御伽噺の積もりが「怪談」になってしまうかも知れない。この先の話をチョロッとだけ書くと、有理数体を含む極めて自然な檻が少なくとも二つある。その一つは実数全体の集合 $\boldsymbol{R}$ という良くある檻である。所謂「数直線」の世界である。この中に円周率 π が含まれるのはほぼ「明らか」であろう。そしてもう一つは「とんでもない檻」で、有理数体 $\boldsymbol{Q}$ を含む（代数学的な観点から観ると）極めて自然な体である $\overline{\boldsymbol{Q}}$ と書かれる「怪物」である。この先には更に凄い話があるが、それは別の機会の話とでもしておこう。

挑戦問題４（大先生：これは難しいので「考えない」方が良いかも。）
どんな有理数を係数とする多項式

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots a_{n-1}x + a_n$$

を取っても $P(\pi) = 0$ とはならない事を証明出来る人はいますか？（もし居たら僕はビックリ !! ）

結論から言うと「ここで説明した種類の檻」達は実数体 $\boldsymbol{R}$ を除くと皆有限性が高すぎて「円周率」を閉じ込める事は出来ないのである。であるからして次の話に行く事としよう。但し、ここで登場した檻達が現代数学で役立たずであるという事は全く無い。$\boldsymbol{N}$ とか $\boldsymbol{Z}$ とか $\boldsymbol{Q}$ とか、そして $\overline{\boldsymbol{Q}}$ とかみんな全てとても重要な檻達である。「用途が違う」だけなのである。いずれにしても代数学は現代数学を記述する素晴らしい言語だと僕は思っている。

2　（古典）解析学から観ると。

円周率 π の値を具体的に数値として計算する理論的方法を与えるのが微積分である。微積分は「理論」と言うよりも「計算の技」とか「道具」という感じさえもある。この「道具」の基本にある考え方は「近似」である。「微分」とか「定積分」とか「無限級数」とかを思い出して欲しい。これらのものはみんな極限という操作を使って定義されている。つまりどういう事をするかというと、本来は有限なものを「無限小」或いは「無限大」で近似計算して、そして確定的な答を出すという驚くべき技である。そういう事をするから極限という操作で閉じている数の世界が必要になる。それが実数体 $\boldsymbol{R}$ である。解析学という数学は主に実数体 $\boldsymbol{R}$ 上で展開される。そして微積分学は解析学という重要な数学分野の入り口でもある。だからここでは極限とか微分とか積分とかが出てくる。解析学は素晴らしい道具を我々数学者に提供してくれる。

そんでもって円周率に話を戻すと、例えばこんな事になっている。先ず円周率 π という数が実数の世界の中で認識されるという事を確認するには、数列：

$$a_1 = 3 \quad a_2 = 3.1 \quad a_3 = 3.14 \quad a_4 = 3.141 \quad a_5 = 3.1415 \quad \cdots \ \cdots$$

を考える事とする。そしてこの数列の極限：

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

を π という数として定める、という論法を取る事も出来る。

演習問題１（大先生：我々の業界では「上に有界な単調増加数列は収束する」と言って納得する。）
この数列が収束する事を納得（証明）してみよう。

然しこの議論は実際の値の計算に関しては何も言っていない。それは当り前で、π が $3.1415\cdots$ である事が前以て判っていての議論だからである。然しそれはともあれこんな極限操作でしか定義出来ない数達を扱う世界が実数の世界であり、そこで解析学という数学が展開されている事を覚えておいて欲しい。

それで円周率 π の値の具体的な計算を試みてみる事としよう。最初の定義を使う事とすると、基本はとにかく円周の長さであった。だから先ずは半径が１の円の方程式を見てみると：

$$x^2 + y^2 = 1$$

となっているので、円の下半分を無視してしまい、円の上半分の部分だけに注目してそれを $y = f(x)$ の形に無理矢理に書くと（こういうのを「陰関数定理の乱用」という）：

$$y = f(x) = \sqrt{1 - x^2} \qquad \text{但し } -1 \leq x \leq 1$$

てな形をしている。

研究問題２（大先生：大学で数学科に入学するとこれは必ず出て来る。）
$F(x, y) = 0$ の形で書かれている（関数のような）ものを $y = f(x)$ の形に書きたい時はどうすれば良いか？

ともかくはこの様な事情であるからして、次は曲線の長さの公式なるもの：

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2}\, dx$$

を使う事にすれば関数 f の微分の計算は

$$\frac{df}{dx} = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

となるから上にある問題の積分は

$$\ell = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

となる。

演習問題３（大先生：良く考えたら出来る筈だ。皆で考えてみよう。）
上で使った「曲線の長さを求める公式」を証明し、そして上の微分の計算を自分達で確かめてみよう。

ここでちょっと余計なお節介をしておくと、関数 f の微分は

$$\frac{df}{dx} := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

である事位は皆知っていると思う。但し $\Delta f(x)$ は $f(x+\Delta x) - f(x)$ の事である。それで積分はと言うと、これも余計なお節介ではあろうが、例えば関数 f の区間 $[a,b]$ での積分は、先ず区間 $[a,b]$ を有限個の小さい区間：

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

に分割して、それに Δ という名前を取り敢えずは付けておく。そんでもってこの分割 Δ の「サイズ」である実数 $|\Delta|$ を

$$|\Delta| := \max\{|x_{i+1} - x_i| \ : \ i = 0, 1, \cdots n-1\}$$

と決めておき、更にその各小区間 $[x_n, x_{n+1}]$ の中に適当な数 ξ_n を取って

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

とやるのが所謂（リーマン）積分の定義だそうである。これを「区分求積法」というらしい。（お節介は以上で終わり。）

さて円周率である。ここでもし積分される問題の関数の原始関数 $F(x)$ が都合の良い形で書けていて

$$\frac{dF}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ , \qquad \ell = F(1) - F(-1)$$

となっていれば申し分が無いのであろうが、残念ながらそうはいかない。これが値としての円周率 π の正体の一つでもある。

実はこれはどうなっているかと言うと、上の原始関数 $F(x)$ の一つは三角関数の逆関数を使って与えられる。実際に $y = \sin x$ という関数を $-\pi/2 \le x \le \pi/2$ の部分だけ切り出して $x = Sin^{-1}y$ と書くという約束事に従うと（これを逆関数という。）上の原始関数で沢山あるものの一つは $F(x) = Sin^{-1}x$ によって与えられる事が知られている。すると $F(1) = \pi/2$、$F(-1) = -\pi/2$ で、$\ell = \pi$、つまり何も具体的に計算した事にはならない。

という様な経緯もあって微積分のちょっとしたな理屈がある程度必要になって来るのは致し方が無い事をお許し願いたい。其処で大学の数学科の講義では必ず出て来る事になっているある手法を使うと、例えば次の様な公式（ライプニッツ級数と言うらしい。）

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

とかが証明出来てしまう。高校生の皆さんには少々難しいかもしれないけれど、取り敢えずは納得して貰うしか無いのはひとえに僕の実力不足であろうから御勘弁。それでこれはどういう事かと言うと、三角関数が幾つもあるその中で $y = \tan x$ というのがあるけれど、その $-\pi/2 < x < \pi/2$ の部分だけを切り出して、それを $x = Tan^{-1} y$ と書くという約束事に再び従う事とする。それで、この二つの関数達 tan と Tan^{-1} はとても良い性質を持った関数達（僕達の業界用語では解析関数と言う）であるという事実を使うと、微積分の一つの帰結であるマクローリン展開とか言う $x = 0$ の所での無限級数展開公式：

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots\cdots$$

なる手法を使う事が出来るのである。（実はこれは平均値の定理の一般化なのだけれど $\cdots$）そんでもって $f(x) = Tan^{-1}x$ として上の級数の各項を具体的に計算すると

$$Tan^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

が証明出来てしまう。其処に $x = 1$ を代入して $Tan^{-1}1 = \frac{\pi}{4}$ を計算したものが最初の公式である。（要するに中身は $\tan\frac{\pi}{4} = 1$ の事。）

演習問題 4（大先生：これはちょっと難しいかも。でもやってみる価値はあるだろう。）
$f(x) = Tan^{-1}x$ とする時、この関数の微分は

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

となる。これは僕が説明する事としよう。（これは逆関数の微分だから何てことないんだけど。）それで、この関数を更に何回も微分して上の展開公式を導いてみましょう。

数学者ならば（これに厳密な証明が付いているので）納得しても良かろう。然し計算機科学者達はこれでは余り納得しないらしい。要するにこれでは実際に計算機を使って円周率を何十万桁も計算する際に具合が悪いらしい。収束が遅いという事らしい。其処で例えばマーチンの公式と呼ばれている等式：

$$\frac{\pi}{4} = 4Tan^{-1}\frac{1}{5} - Tan^{-1}\frac{1}{239}$$

とか各種の公式達を使うという事であるらしい。聞いた話によるとこれ等の公式達を使うと上に出てくる無限級数達の収束が速くなるので、併せて超高速のスーパーコンピューターを使って円周率の計算の記録を作ってギネスブックに記録が載ったりしているらしいが、これ以上の事は無知な僕は知らない。僕の不勉強をお許し願いたい。更に人から聞いた話ではあるが、どうやらこの類がスーパーコンピューターのベンチマーク・テスト（性能試験）に使われているという話もあるらしい。

　で、ここでちょっと脱線してみよう。ここで話した様な技なり公式を使うといろんなものの「面積」とか「体積」とかが計算出来てしまう。例えば n-次元球面の（表）面積とか体積とか、そんなのは全部とても美しく計算できてしまう。例えば半径 R の 2 次元球面だとその体積 V と表面積 S は次の様になる。

$$V(R) = \frac{4\pi R^3}{3} \qquad S(R) = 4\pi R^2$$

ここで一つ気づいて欲しい事がある。状況はこの小文の初めに書いてある筋書きと全く同じである。つまり：

$$V(R) = \int_0^R S(r)dr \qquad \frac{dV(R)}{dR} = S(R)$$

となっている事だ。それで、つまらない補足をすると、$V(R)$ は「回転体の体積の公式」で割と簡単に出てしまうが、$S(R)$ の方はちょっとそうは行かない。

研究問題 5（大先生：コラ増田、アホな問題を出すな！）
この状況を自分なりに納得（理解）しましょう。

3　幾何学から観ると。

僕の個人的な感じからすると、幾何学は数学の究極の一つの形態だと思っている。僕にとっては幾何学は数学をする時の哲学みたいなものである。古典、現代を問わず数学の大切な問題が幾何学的な考察から出てくる事が多いと僕は何時も感じている。大昔のユークリッドの聖典（旧約聖書とでも言っておこう）は平面、或いは立体幾何学に関するものであった。其処には円やら円柱やら球やらそんな動物達がいっぱい出てくる。そして時代は下り、もはや前世紀となってしまった２０世紀、グロタンディックという超人が再び幾何学の聖典を著した。これは代数幾何学という幾何学の壮絶な分野で、代数学を基本言語とする超抽象的で余りにも美しい幾何学分野を拓いた、いわば「新約聖書」とでも言うべき数学である。其処には「幾何学」や「代数学」はもとより「解析学」をも含めた全ての数学が集約された美しい夢の世界が展開されている $\cdots$

それで現代の幾何学はと言うと、あの大グロタンディック以降は数学が余りにも抽象的になりすぎたという反省もあってか、（数理、又は理論）物理学から面白い素材を見つけて「新しい幾何学」を展開し、そして次世代の幾何学を模索している。やっぱり幾何学は数学の「源泉」なのかもしれない。数学の面白い問題がかなり多く幾何学から出て来ているという感じを僕は持っている。

それはさておき、円周率に話を戻そう。そもそもこの小文の最初の問題設定から考えても円周率は幾何学的な問題と密接に繋がっている。全ての幾何学的な図形はまっすぐな直線だけから構成されているものではないし、そんな幾何学的な図形達の面積やら体積やらをどうやって求めるのかとかは、いわば「当然の疑問」という事になるであろう。

僕はここで「幾何学」に関する自分の勝手な「蘊蓄」を展開しようとは思わない。この節は「絵を描いてごまかす」事としよう。下の手書きの左の図が**図１**、また右の図が**図２**としておこう。図１の図形はソリッド・トーラスと呼ばれています。また図２は唯の円柱です。

演習問題１（大先生：そろそろいい加減にしたらー。）
図１と図２の図形の体積と表面積を求めてみましょう。但し図２の「切り口」の面積は無視して下さい。

研究問題２（大先生：絶句。）
図１の図形の体積と表面積は図２の体積と表面積にそれぞれ一致するのだが、その理由が何であるか説明できますか？

4　若き日のある想い出。

かつて僕が大阪大学基礎工学部の学部学生であった時、大学院の指導教官となってくれそうな先生を探して各地のいろんな先生方を訪ねて回った時の事である。理論物理学を大学院で専攻しようとして理論物理学の初歩をかじっていた僕は、当時京都大学数理解析研究所に居られた超一流の理論物理学者でおられる中西先生にこんな質問をした事がある。

僕　：「理論物理学では円周率が様々な所に出てきますが、それには何か深い物理的な理由があるのでしょうか？」

中西先生：「そういう事を何時も頭の片隅に置いておくのはとても大切な事です。でもそんな事ばかり考えていたら研究論文が書けなくなります。研究者とはそんな甘いものではありません。」

僕　：「はーそうなんですかー」

結局僕は京都大学の中西先生ではなく、別の先生に大学院の指導教官になって頂き、理論物理学ではなく純粋数学を専攻した。しかしこの時の中西先生のお言葉は今でも何となく「気になって」いる $\cdots\cdots$

5　参考書とか。

先ずは何と言っても「数学辞典」（岩波書店）であろう。其処の「円周率」の項目には次の様な記述がある。

Euclid 平面上の円周の長さと直径との比、即ち $2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ の値を**円周率**といい、W. Jones (1675-1749) および L. Euler 以来 $\pi\epsilon\rho\acute{}\iota\mu\epsilon\tau\rho o\zeta$（周）の頭字 π で表わす習慣である。この比が定数であることは Euclid の ”原本 ”に記されているが、その数値については Euclid は何も述べていない。その近似値としては３が古くから用いられ、リンド・パピルスによればエジプトでは $(4/3)^4$ も用いられていた。直径１の円に外接（内接）する正 n 角形の周を L_n（ℓ_n）とすると、

$$L_n > \pi > \ell_n\ , \quad \frac{2}{L_{2n}} = \frac{1}{L_n} + \frac{1}{\ell_n}\ , \quad \ell_{2n} = \sqrt{\ell_n L_{2n}}$$

という関係があるが、Archimedes は円に内接及び外接する正 96 角形の周を計算し、$310/71 < \pi < 31/7$ を得た。インドの Āryabhata（５世紀）は 3.1416、ヨーロッパの Adriaan Anthonisz（１６世紀）は 355/113、魏の劉徽（３世紀）は 3.14 、宋の祖沖之（５世紀）は近似値として 22/7（約率）と 355/113（密率）とを得た。これらはいずれも Archimedes と同種の方法によって得られたものである。

（中略）

オランダの Ludolph van Ceulen (1540-1610) はこの式から π を小数点以下第３５位まで計算した。和算家関孝和、建部賢弘、松永良弼（１７－１８世紀）らによっても、第５０位までの値が計算されていた。１７世紀以後は無限級数の和あるいは種々の形の極限値して π を表わす多くの式が得られ、その近似値も精密に計算されるようになった。$\cdots\cdots$

（後略）そして其処には例えば

[1] 野崎明弘、π の話、岩波、１９７４

[2] ベックマン、π の歴史、蒼樹書房、１９７３

等を見ると良い、とある。