民主主義国家構築のために

坪井明人

2002 年 7 月 28 日

[はじめに]

高校生のみなさん，こんにちは．この講義体験学習では，今まで学校で習ってきた数学とは少し違った数学を展開したいと思います．生活に根ざした数学ではありませんが，実際的な問題意識を数学的に表現して議論を進めます．数学には直観的な事柄をその背景から分離して，形式的に定義することにより，より広い範囲に適用をするという方法論があります．今日の話もその流れ一つ（かな？）．かなり抽象的な説明でしたが，実際の講義はずっとくだけた内容になります．頭の体操のつもりで聞いてみて下さい．初めてのことで，少々心配な面もありますが，楽しくやりましょう．

1　民主主義の定義

民主主義という言葉を辞典で調べて見ました．

Definition 1　1. みんしゅ - しゅぎ【民主主義】

- 人民が権力を所有し行使する政治形態。古代ギリシアに始まり、一七、八世紀の市民革命を経て成立した近代国家の主要な政治原理および政治形態となった。近代民主主義においては、国民主権・基本的人権・法の支配・権力の分立などが重要とされる。現代では政治形態だけでなく、広く一般に、人間の自由と平等を尊重する立場をいう。デモクラシー。（大辞泉）
- 人民が権力を所有し行使するという政治原理。権力が社会全体の構成員に合法的に与えられている政治形態。ギリシャ都市国家に発し、近代市民革命により一般化した。現代では、人間の自由や平等を尊重する立場をも示す。（大辞林）

- 語源はギリシア語の demokratia で，demos(人民) と kratia（権力）を結合したもの．すなわち，人民が権力を所有し，権力を自ら行使する立場をいう．古代ギリシアの都市国家に行われたものを初めとし，近世にいたって市民革命を起した欧米諸国に勃興．基本的人権・自由権・平等権あるいは多数決原理・法治主義などがその主たる属性であり，また，その実現が要請される.（広辞苑）

2. たすう - は【多数派】
   - 属する人数が多いほうの派。（大辞泉）
   - そのもとに結集したり、支持したりする者の多い党派・流派。（大辞林）
3. たすう-けつ 【多数決】会議などで全体の意見がいくつかに分かれたとき、賛成者の数の多い考えを採用すること。（大辞泉）

以上をまとめて次のように要約しました：

(*) 民主主義とは人民が意思決定の主役になる政治形態で，意思決定は多数決原理を通じて行われる．多数決は多数派の意見を採用する意志集約の手段である．

ついでに，民主主義とは対極にあると思われる言葉を調べました：

Definition 2 独裁者（dictator ［dikteit(r)］）(1) 政治権力のすべてを掌握しそれを独断で行使する者。
(2) 何事も独断で決めてしまうような人。

いくつか例を見ていくことにしましょう．

Example 3 ５人家族で食事に行くことになりました．２人が中華レストラン，３人が和食レストランを望んだので，みんなで和食レストランに行きましたとさ．

Example 4 次の日も同じ５人家族で食事に行くことになりました．末の娘が中華レストラン，他の４人が和食レストランを望みましたが，みんなで中華レストランに行きましたとさ．

2　多数決を数学的に表現

多数決は，数の多い方の意見を採用するというものですが，もう少し数学的に表現してみましょう．

Example 5 $2n+1$ 個の元を持つ有限集合 A に対して，

$$U = \{X \subset A : |X| > n\}$$

を作る．ただし，$|X|$ は集合 X の元の個数を表している．U は多数派集合たちの集まりである．実際，A に対する多数決とは次の意志決定手段と定義できる：

- ある案に関して A の人たちに意見を聞く．A の中で賛成の人の集合 X が U に属せば，その案は採用され，反対の人が U に属せばその案は否決される．

Remark 6 U は次の性質を持っている：

1. すべての $X \subset A$ に対して，

$$X \in U \text{ または } \overline{X} \in U$$

ただし，両方が属することはない．($\overline{X}$ は X の A での補集合を表している.)

2. $X \subset Y \subset A$，$X \in U \Rightarrow Y \in U$.

Example 7 ある５人家族で「芸能人誰を知っているアンケート調査」をしました．その結果，*Gackt* を知っているのが３人で多数派，東海林太郎を知っているのも３人で多数派, ひなたおさむ を知っているのも３人で多数派でした．でも上の３人をすべて知っている人はいませんでした.

このことは，多数派集合の集まり U が条件

3. $X_1, ..., X_n \in U \Rightarrow X_1 \cap ... \cap X_n \neq \emptyset$

を満たさないことを意味する.

多数派集合からなる集合 U が条件３を満たさないということは，民主主義の危機とは言えないだろうか．それぞれの議案で民意が反映されたとしても，全体としては，誰の為にもならないことがあるということである．では，どうしたらよいか.

3　独裁者のいる世界

以下において，A のべき集合を $\mathcal{P}(A)$ とかきます．すなわち，$\mathcal{P}(A)$=「A のすべての部分集合からなる集合」．例えば,「$U \subset \mathcal{P}(A)$」は，U に属する元は A の部分集合になっているという意味です.

Example 8 A を有限集合として，$a \in A$ を一つ固定する．

$$U_a = \{X \subset A : a \in X\}$$

とすれば，U_a は上に述べた性質1,2を持つ．さらに，条件３も満たされる.

- 再掲：
  1. すべての $X \subset A$ に対して，
  $$X \in U \text{ または } \overline{X} \in U$$
  2. $X \subset Y \subset A$，$X \in U \Rightarrow Y \in U$.
  3. $X_1, ..., X_n \in U \Rightarrow X_1 \cap ... \cap X_n \neq \emptyset$

Remark 9 上の例では a さんが独裁者です．独裁者の考えることがすべて．よって３の条件も自明に成り立っている．独裁者がいれば，いろんな議案ごとに決をとったとしても，少なくとも全体としてその独裁者のためにはなっている.

Question 10 それでは，独裁者のいる世界がよい世界でしょうか．数学的にそれを判断することはもちろん不可能です．でも，独裁者がいないのに，１－３というすべての条件が成り立つ多数派集合族 $U \subset \mathcal{P}(A)$ を作れないでしょうか．実は人数が有限の場合は不可能なことがわかります.

- 理想的な条件1-3を持つ民主主義国家は永遠の夢か？

Exercise 11 A が有限の場合には，条件1-3を満たす $U \subset \mathcal{P}(A)$ は，必ず U_a の形になることを示せ.

4　無限の場合

Question 12 ある家族はとても子沢山で無限人の子供 $A=\{K_1,K_2,...\}$ がいましたとさ．日曜日の夕方，お父さんが今日の晩御飯は中華と和食とどちらがよいかを聞いたところ，偶数番号の子供は中華と答え，奇数番号の子供は和食と答えました．さてお父さんはどうしたらいいでしょう．

Remark 13 独裁者 a のいる U_a を作れば，有限の場合と同じように 1-3 の条件は満たされます．有限の場合の多数決集合 U を模して，無限の場合に考えようとしても，単純に人数の比較はできません．両方無限の場合がありますから…

Definition 14 無限集合 A に対して，$U\subset\mathcal{P}(A)$ が前頁の条件 1-3 を満たすとき，U を A 上の *ultrafilter* という．また，特に U が U_a（独裁者型）の形でないとき，*non-principal ultrafilter* という．

我々が求めていた理想的な集合 U は，上の言葉を使うと non-principal ultrafilter U となる．では non-principal ultrafilter は存在するのか．それに対する答えは：

Theorem 15 A が無限集合のとき，A 上の *non-principal ultrafilter* は存在する．

Proof: Zorn の補題（講義で説明予定）による．$F=\{X\subset A : X^c \text{ は有限}\}$ とすれば，F は条件 3 を満たす．F を拡大して，条件 3 を満たす極大な集合 U を作る．U は 1,2,3 を同時に満たす．また，独裁者がいないことは F を拡大していることから明らか．

Remark 16 non-principal ultrafilter の存在が言えました．賢明な諸君は次に,「具体的にはどんなものだろう」,「例が欲しい」と考えるかも知れません．残念ながら，具体例はありません．具体例を作るのがむずかしいという意味ではなくて，本当に具体的なものはないのです．例がないのに存在するとはどういうことか….それは，存在証明に超越的な手法を使っているからです．

5　応用–無限小の構成

最後に少しだけ応用をしてみます.「大きな」部分集合たちという概念を前節までに紹介しましたが,「大きな」集合たちを使うと「とても小さい」という概念を定義できます．不思議でしょ??

- $\mathbb{N}$ を自然数全体の集合，$\mathbb{R}$ を実数全体の集合して，
- $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ を数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の全体とする．
- U を $\mathbb{N}$ 上の non-principal ultrafilter とする．U に属する集合は多数派を意味する．

Definition 17 二つの数列 $\{a_n\},\{b_n\}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ に対して，

- 値が一致する番号が U の意味で多数派のときに同一視する（*i.e.* $\{a_n\}=\{b_n\} \iff \{n : a_n=b_n\}\in U$）;
- $\{a_n\}+\{b_n\}=\{a_n+b_n\}$;
- $\{a_n\}\cdot\{b_n\}=\{a_n\cdot b_n\}$;
- $\{a_n\}>\{b_n\} \iff \{n : a_n>b_n\}\in U$.

Remark 18 我々の空間 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ は数列の空間そのものではなくて，数列の空間を同一視によって縮めたものになっていることである．実際，数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ はほとんどおなじ値をとるとき同じものと見ている．例えば，$a_1=1, a_2=2$, $a_n=1/n\ (n\geq 3)$ と $b_1=2, b_2=1$, $b_n=1/n\ (n\geq 3)$ は最初の 2 項だけ違うが後はおなじになっているので，同じものと見ている．このように見た空間 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ に対しても上の数列の加法，乗法，大小関係がうまく定義できていることが，U が *ultrafilter* になっていることを使うと証明できる.（定義が *well-defined* になっていることが証明できる．わかるかな？わかる訳ないだろうなあ．講義ではなるべく高校生諸君が理解できるように説明を試みます.）

Remark 19 こうして作った $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ は $\mathbb{R}$ にとても似ていることが示される．

さらに，$a\in\mathbb{R}$ を恒等的に値 a をとる数列 $(a,a,...)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ と同一視すれば，$\mathbb{R}\subset\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ である．しかし，一つだけ違っていることがある．それは $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ には無限小が存在することである．以下でその一端を紹介しよう．

Example 20 数列に対して定義された加法，乗法は $\mathbb{R}$ でのそれと同様に次の諸性質を満たす：$a=\{a_i\}, b=\{b_i\}, c=\{c_i\}\in\mathbb{R}$ とするとき，

1. $a+b=b+a$;
2. $a\cdot b=b\cdot a$;
3. $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$.

Example 21 $\eta = \{1/n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ とすれば，η は（0 と異なる）無限小である．実際，

$$0 < \eta < a$$

がすべての正の実数 $a \in \mathbb{R}$ に対して成立する．ただし，0 は恒等的に値 0 をとる数列，a は恒等的に値 a をとる数列を表している．

Remark 22 無限小はその昔のよき時代にはあったが，$\varepsilon - \delta$ によって厳密に極限，連続の概念が定義されてから，消えた．実数の世界 $\mathbb{R}$ には無限小はないからである．しかし，実数の世界を拡大したところ ${}^*\mathbb{R}$ に無限小を復活させて数学を議論する方法が生まれた．

無限小があると次のようなとてもいいことが言える：

Theorem 23 関数 $f(x)$ が点 $a \in \mathbb{R}$ で連続になる必要充分条件は

$$|b-a| \text{ が無限小} \Rightarrow |f(b)-f(a)| \text{ が無限小}$$

となることである．

最後に.

- 今日の話は，実際の政治，立法の話とはあまり関係ないです.
- 民主主義実現のために子供を限りなく産もうとは思わないでください.
- 冒頭の [はじめに] の部分に隠された秘密を発見せよ．数学よりむつかしいよ．
- もし，興味のある人は，

  http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tsuboi/ under.html

  にある大学生用の講義ノートを見てください．