切ったり貼ったり
— デーンの定理とその周辺 —

坂井 公 (筑波大学 数学系)

1　虫食いテーブルクロス

「あなた！大変よ，大変」

晴天に恵まれた春のある日，高校 3 年生の花子が，受験勉強などそっちのけで，居間のソファーに深々と腰掛けてマンガを読んでいると，別室で家具や衣類を冬物から夏物へ転換する作業にいそしんでいた母親がやって来て，大声を上げた．父親が，面倒くさそうに書斎に通ずる扉から顔だけのぞかせて，

「え，騒々しいな．一体何だって？」

仕事で忙しそうなふりをしているが，花子は，父が書斎にゲーム機を持ち込むのを目撃していたから，実は，音を殺して人気 RPG をこっそり楽しんでいたことを知っている．母もうすうす気づいているようだが，今はそれどころでなく，

「テーブクロスよ．気に入ってたのに……虫に食べられちゃったのよ．それにもうこの柄のものは売ってないのよ」

「ああ，それね．今のテーブルには大きすぎると言ってたじゃないか．切って使えばちょうどいいんじゃないのか？」

「だめよ．虫食いが大きすぎて．切ったりしたら，縦も横も今の 1/3 になっちゃうわ」

母の手にあるテーブルクロスを見ると，確かにそれは無残にも四隅を大きくかじられ，ほとんど赤十字のマークのような形をしていた．父もそれを見てあきれ顔をしていたが，やがて，何か思いついたらしく，

「まてよ．テーブルの大きさはどんなだったかな?」

「一辺がちょうど 1 メートルの正方形よ．まるで家族麻雀でもどうぞと言わんばかりの形であきれちゃうわよ．うちは 3 人しかいないのに」

父は，そんな感想など完全に無視して,「で，そのテーブルクロスの大きさは？」

「もとは一辺 1.5 メートルほどの正方形だったのよ．今は面積だって，やっとその半分くらいね」

「ふむふむ，模様はただの格子柄だし……ちょっと貸してごらん」

父は，母の手からクロスをもぎ取るようにして，書斎に走りこんだ．

花子がのぞいてみると，あいかわらず，書斎はパソコンなどの電子機器や部品でいっぱいで，とても数学者のものとは思えない．ドライバやペンチだけでなく，のこぎり・ハンマー・かんなまで，ほとんど開かれた様子のない数学の専門書の隣に散らばっている．父は，ゲーム機のモニタのスイッチを切り，物差しと鋏を拾い上げて，なにやら工作を始めた．

見ていても仕方がないので，花子がソファーに戻り，マンガの続きを読んでいると，やがて父が嬉々として書斎から出てきて，母を呼んだ．花子は，父が広げて持っているものを見て驚いた．さっきのクロスのようだが，虫食いの跡はどこにもなく，大きさも形もちょうどテーブルにピッタリだ．ただ，格子縞がやや斜めに走っている．

仕事場を居間に移して，作業の続きをしていた母もびっくりして，

「その柄の布地，どこかに隠してあったの？」

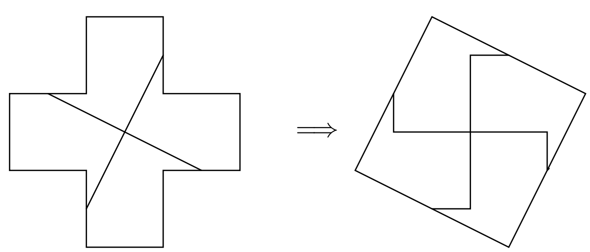
「違うさ．……そうか，遠くからだと分からないようなら，貼り合わせもまあまあうまく行ったということだな」

「え，パッチワークということ？なるほどね．でも，

その形にするには大変だったでしょう？」

「そうでもないさ．大きく 4 つに切って，もう一度貼り合わせただけだから．虫がきれいな十字の形に食ってくれていたので，無駄な断片もほとんどでなかったよ．格子縞を合わせるのにちょっと苦労したけどね．花子，どういうふうに切ったか分かるかい？」

それを聞いて，トバッチリを避けるかのように姿を消す母親を横目で追いながら，花子は，紙と鉛筆を取ってくると，あれこれ考えてみた．しばらくして降参すると，父は満足そうにうなずいて「こうするのさ」と図を書いた．



花子は，ちょっと感心した．だが，悔しいので「ふん，こんな問題，入試には出ないわよ」と負け惜しみを言っていると，いつのまにか戻って来た母がさっきと色合いだけ違う同じ柄の十字形クロスを広げて，

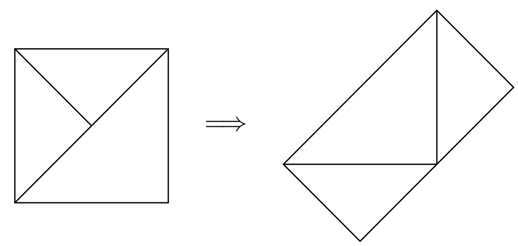
「実は，この柄はもう手に入らないだろうと思って，色違いをもう 1 枚買っておいたのよ，重ねてしまっておいたら，両方とも同じようにかじられてしまったの」

「え，2 枚はいらないだろ？」と父．

「ええ．でも，この前，応接用テーブルを買ったでしょ．あれのクロスでいいのがなっかたのよ．今，測ってみたら，縦が 70 cm ちょっとで横がそのちょうど 2 倍の長方形．ね，面積はほぼ同じだから，正方形のクロスをパッチワークで作れるなら，長方形だって……」

花子が名誉挽回とばかりに割り込んだ．

「それなら簡単よ．まず，さっきみたいに正方形にしてから……」とさらさらと図を書いて「ほら，こうすればいいでしょ」



「ほう，うまいな」と父がのぞき込んだ．それから少し考えて,「しかし，それでは最初の十字形から考えると 7 つに切って貼り合わせることになる．うまくやれば 3 つに切るだけですむよ」

問題 1.1. それにはどうすればいいか？

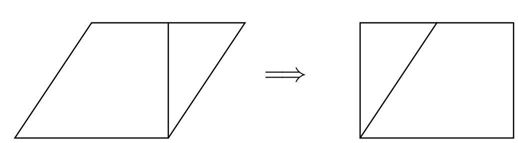
花子は，あれこれ図を書いて，やっとその方法を見つけたが，ふと疑問が浮かび,

「ねえ, パパ，面積が同じ図形なら，こうやって切り貼りをすることで，いつでも一方から他方へ変換できるのかしら」

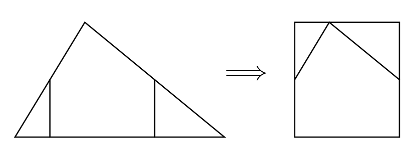
2　分解合同

「なかなか面白い問題に気がついたな．そういう 2 つの図形を互いに**分解合同**だって言うのさ．模様がある場合にその模様まで合うようにするのは無理だけど，模様がない場合は，面積が同じだと分解合同なことが多いよ．どんな図形もそうかどうかは，ちょっと考えてごらん」

「うーん．平行四辺形の面積が底辺かける高さになるのは，こういう変形ができるからよね．



小学校で習ったわ．三角形も

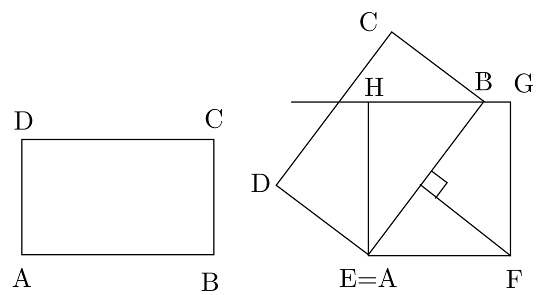


とすれば長方形になる．ということは，同面積の長方形同士が分解合同なら，三角形や平行四辺形は，長方形経由でいつも互いに分解合同ね．だけど……」

花子は，しばらく考えていたが，やがてニヤリと父の方を向き，

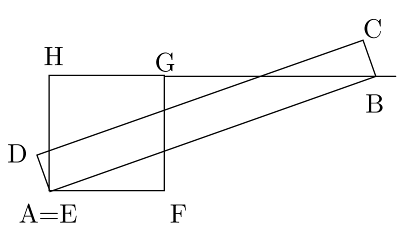
「やだ，うまいこと載せられて，本気で考えちゃったわ．長方形同士だと，いつもうまく行くとは限らないんでしょ．人がマンガ読むのを邪魔しちゃってさ」

「そうか．ちょっと難しかったかな．では，教えてやろう．2 つの長方形を ABCD と EFGH とするよ．辺のうち一番長いのを選ぶんだ．それを AB としてもいいだろ．で，ABCD を動かして，A を E に重ね，B が辺 GH の上に来るようにする．そこで F から AB に垂線をおろす．



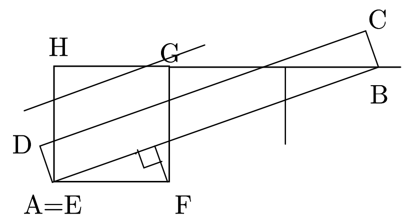
あとは，線に沿って長方形を切り貼りするだけさ．簡単だろ」

「そうか．さっきあたしが正方形を長方形に変形したのも，このやり方の特殊な場合だったのね．……あ，でも，ちょっと待って．ほら．ABCD がこんなに細長くて，EFGH が正方形に近い形だったら，B が GH の外に行っちゃうわ」



「お，考えたな．でも，方法はあるのさ．ABCD を横に何等分かして縦に貼り合わせ，正方形に近い形にしてから，さっきの方法を使ってもいいけど，それだと，貼りあわせ枚数が多くなりそうだから……」

父は，さっきの花子の図に線を何本か描き足して

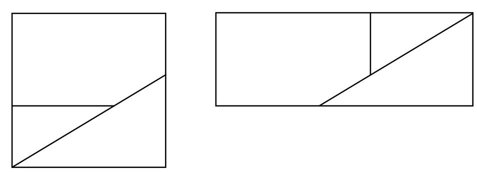


「ほら，これでいい．どう切り貼りするかは，図を見れば分かるだろう．こういう平行線を何本か使えば長方形がどんなに細長くても大丈夫なのさ」

問題 2.1. 上の図では，長方形を正方形に近い形に変えるのに 5 枚の断片に切っている．では，上の方法で一般に $a \times 1/a$ の長方形を面積 1 の正方形に変えるにはいくつに切ればいいか？ $a > 1$ として考えよ．

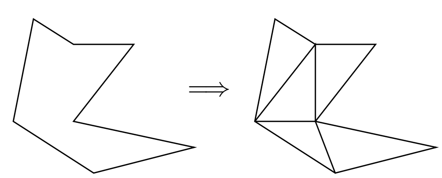
「うーん．意外ね．きっと，一方の長方形を斜めにおくのがミソね」

「ところがね，両方の長方形の向きをそろえて置く方法もあるのさ．斜めに切る必要はあるけどね．そのほうが分かりやすいかもしれない．この図で分かるかな？」



花子は，しばらく図を見ていたが，やがてうなずき，

「つまり，長方形同士は面積が同じなら分解合同というわけね．しかも，方法もいろいろある．……あれ，そしたら，どんな図形でも，面積が同じなら互いに分解合同じゃない．だって，どんな図形も，例えばこんなふうにして，

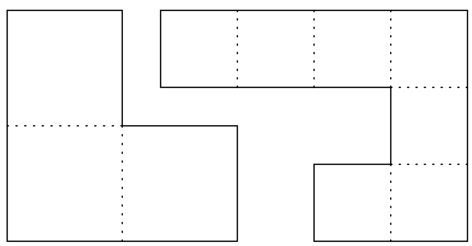


三角形に分割できるでしょ．で，三角形は，どれも長方形に変えられる．そんでもって，今のやり方を使うと長方形の横幅を好きに変えられるわけよね．ということは，各三角形を横幅一定の長方形に変えて，次々

につなぎ合わせれば，一つの長方形になるということじゃない．早い話がどんな図形も同じ面積の長方形と分解合同で，しかも長方形の横幅は好きにできる」

「お，結構やるね．すごい，すごい．ゆえに同面積の図形同士はどれも，長方形経由で分解合同ということになる．断片数を減らすという問題はまた別だけど，これでさっきの疑問は解決だね」

問題 2.2. 下は正方形をいくつか集めてできた図形である．切り貼りして，それぞれ形を正方形にせよ．



花子が少しいい気分になっていると，母親が後ろから口を挟んだ．

「難問解決おめでとう．ちょうどいい応用問題があるのよ」

「いいわよ．もう，何でもござれよ」と言う花子に「はい，これ」と母が手渡したのは，何の変哲もない無地の長方形の布だ．

「え，これが応用問題？どういう形にしたいのかしらないけど，簡単すぎるんじゃない？」

ところが，母が黙って指差したものを見て，花子は絶句した．居間で小物置きに使っている丸いテーブルだ．

「あれのクロスをパッチワークで作れって言うの?」

「だって，その布は幅 50cm で長さはその 3 倍と少しなのよ．テーブルは半径が 50 cm に少し足りないだけ．さっき，面積が同じならって，言ってたじゃない」

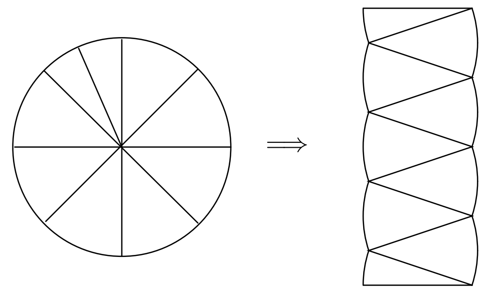
「そりゃ，面積がほぼ同じだってことは暗算でもわかるけど……」

父が割り込んできた.「ははは，さっき証明したのは『ボヤイ・ゲルヴィンの定理』と言うんだけど，確かに同面積の図形なら何でもというわけには行かないね．有限個の三角形に分割する必要があるから，同面積の『多角形』と言い直したほうがいい」

しかし，父は布とテーブルを交互に見て「うん．でも，これなら結構うまくいくかもしれないぞ．花子，円の面積がどうして πr^2 になるのか，学校で図を使って説明を受けたことはないかい？」

「あったかもしれないけど，覚えてないわ」

「では，こういうのはどうだい？



円を放射状に切って扇形をたくさん作り，交互の向きに積むのさ．長方形に近い形ができるだろ．横幅は円の半径 r だし，縦は円周のほぼ半分 πr だ．円を細かく切れば，正確な長方形にいくらでも近づくということは，円の面積は長方形と同じで πr^2 ということだ」

「なるほどね．あ，でもパパが言いたいのは，そんなことではなくて……」

「そう，この切り方のことさ．逆にその布を……そうだな，1000 ぐらいの細長い三角形に切り分けて，丸く配置すれば……」

突然，母の手が伸びて，布をひったくった.「や，やっぱりいいわ．何も真ん丸でなくていいのだから，ほかのでちょうどいいのがあるかもしれないし……それより，そろそろ食事の支度をしようかしら」

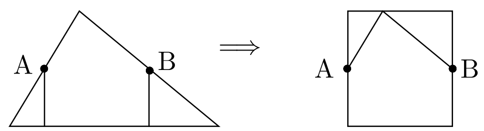
布を大事そうにかかえて，母は逃げるように台所に向かった．

3 点対称と平行移動

これで，しばらくは母が新しい問題を持ち込むことはなさそうだ．花子は，書き散らした図を集めてゴミ箱に捨てようとしたが，見ていてふと別の疑問が湧いてきた．

「ねえ，パパ，さっきの虫食いクロスは柄までキチンと合わせられたじゃない．大きな模様が描いてある

なら，切り貼りしたらメチャになるに決まっているけど，ああいう細かい格子模様や木目みたいな縞模様なら，方向さえ合わせれば，それなりに見えるでしょ．で，例えば，この図なんだけど



2 つの三角形をそれぞれ点 A と B を中心に 180 度回転してるだけだから，縞や格子の方向は変わらないでしょ．他の図なんか，回転もさせないで，ただ，ずらしているようなのばかりだわ」

「お，面白いことに気がついたな．つまり，模様の方向がそろった切り貼りで分解合同になるかという問題だね．そういうのを考えるには，人によって解釈に食い違いが生じたりしないように，問題を厳密に定義して置いた方がいい．そういうのを問題の定式化って言うんだけど，答えを考える場合にも役に立つことが多い．今の問題の場合，模様の方向が変わらないというのが条件だけど，これはどういうことかな？」

「簡単よ．断片を動かすとき回転させちゃいけないってことでしょ．あ，180 度の回転は例外だけど……あれ，格子模様によっては 90 度も OK ね．どうしよう?」

「そう．そうやって条件を整理することも，定式化の大切な役目だ．そうだね．今は縞模様だけにして 90 度の回転はダメということにしておこう．裏返しにするのはどうする？」

「え，考えもしなかったけど，裏に同じ模様があるとは限らないから禁止ね．それに，そんなことしなくてもうまく行くと思うわ」

「さあ，どうかな？とにかく，これで整理されたね．『2 つの同面積の多角形がある．一方をいくつかに分割して，各断辺を 180 度回転と平行移動で動かして貼り合わせるだけで，もう一方が作れるか』という問題だ．だけど，ここでちょっと言葉も整理して置いた方がいいな．ええと，180 度回転するというのは，ある点を中心にして点対称の位置に図形を移動するということだけど，これを 2 度続けてやったらどうなる？」

「バカみたい．元に戻るに決まってるでしょ」

「おっと，ごめん．同じ点を中心とするのではなくて，例えば，最初は点 A を中心，次には点 B を中心に移動する場合は？」

花子は，実際に図を描いて動かしてみた．

「驚いたわ．どの図形も A から B のほうに平行に移動するのね．しかも，移動距離は線分 AB の 2 倍くらい」

問題 3.1. 上の花子の観察を証明せよ．

「その通り，必ずそうなるのさ．ということは，どんな平行移動も 2 つの点対称移動の連続で作れるということだ．次は，点対称移動を 3 度続けるとどうなるか考えてごらん．これは，平行移動のあとに点対称移動，あるいは点対称移動のあとに平行移動をするのと同じことだよね」

花子は，また，図を描いてみて「ふーん，今度はただの点対称移動になるみたい」

問題 3.2. この対称移動の中心はどういう点になるか？

「そう．つまり，点対称移動は，何回繰り返しても，平行移動と点対称移動以外にはならないのさ．それと，さっき花子が言ったように，同じ点で対称移動を繰り替えすと元に戻っちゃうだろ．こういう構造を数学者は『群』と呼んでるんだけど，名前はどうでもいい．要は，平行移動と点対称移動は，合わせるととてもまとまりのいい集団を作っているということだ．それで，この集団に S という名前を付けるよ．それと，明らかに，平行移動だけ集めても，同様なまとまりのいい集団になるよね．この集団を T と呼ぼう．

「そこで，断辺に分割して点対称移動か平行移動することで互いに移り合うことができる 2 つの図形を S-分解合同と呼び，同様に平行移動だけで移り合えれば T-分解合同と呼ぶことにしよう．そうすると今考えている問題は『同面積の多角形は互いに S-分解合同か？』といい直せる．

「さて，言葉が整理されたから，いよいよ問題に挑戦だ．T-分解合同なら，S-分解合同であることは明らかだよね．花子がさっき言ったように，底辺が平行で，

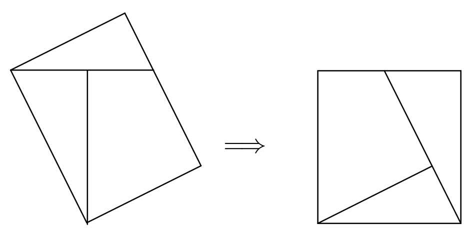
高さの等しい同面積の三角形と長方形は S-分解合同だ．それと，向きのそろった 2 つの長方形は，さっきの 2 番目のやり方で T-分解合同になることが分かる．うん，結構うまく行きそうだけど，一般の多角形を相手にするとき，何か問題がないかな？」

「えーと．最初に三角形に分割して，それぞれを横幅一定の長方形にするのよね．あ，そのとき長方形の向きがそろっていないと，幅が一定でも貼り合わせられないわ」

「そうだね．他には問題がない？」

「逆に，長方形の向きさえそろえられれば，横幅は自由になるわけよね．それを積み重ねるのは平行移動だし……そうよ，それさえできれば，一定の向きに置いた一定幅の長方形を経由して両方の多角形は S-分解合同よ．つまり，長方形の向きを S-分解合同で自由に変えられるかどうかだけが問題なんだわ．……あ，ちょっと待ってね」

花子は，新しい紙を持ってきて，猛然と図を描き始めた.「まず，こう切って．それからこう切れば……



やったわ．平行移動だけで長方形の向きが変えられるじゃない」

問題 3.3. 勝手な方向に置かれた同じ面積の正三角形と正方形が，互いに S-分解合同であることを図で示せ．

「お，だいぶ慣れてきたな．そうだね．これで，多角形は，面積が等しければ，S-分解合同だということが分かった．この結論は『ハドヴィゲール・グリュールの定理』と呼ばれてる．そこでだ．例えば，矢がすり模様なんかだと矢羽根に向きがあるので 180 度回転すると反対向きにになっちゃうだろ．だから，ちょっと難しくなるけど，……」

4　周ベクトル図

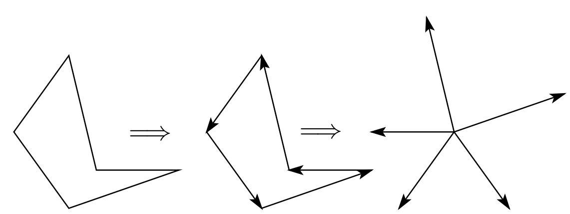
「分かってるわ．パパが怪しげな用語を持ち出して来たときから，魂胆は見え見えなのよね．点対称移動はなし．平行移動だけで，同じことができるかって言うんでしょう．つまり，T-分解合同かどうかね．うーん……今の S-分解合同の話で点対称移動が必要だったのは，三角形から長方形への変換だけだったから，問題はそこだけよね」

花子は，また紙と鉛筆を握って考え始めたが，しばらくして「ダメね．どうしてもいくつかの断片は回転させる必要があるみたい．かといって，何か巧妙なやり方がないとは限らないし……いいわ，マンガも読みたいし，降参よ」

父は満足そうに「うん，これはちょっと難しいからな．実は，同面積というだけでは多角形同士は T-分解合同にはならないのさ」

「え，どうしてそんなに確信が持てるの？誰かが天才的なやり方を見つけないとも限らないでしょ」

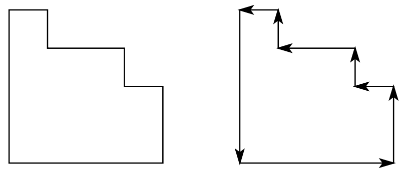
「どんな天才にも絶対に不可能であることを厳密に証明するのこそ，数学の醍醐味さ．多角形の辺に矢印をつけて，反時計回りに多角形をグルッと一周するようにするよ．こういう矢印のついた線分をベクトルと言うのは知ってるね．それで矢印が同じ一点から出るように図を書き直す．例えばこんな具合だ．



名前があった方がいいね．右の放射状の図を左の多角形の**周ベクトル図**と呼ぶことにしよう」

「ふーん．でもほらこんな階段状の図だと，同じ方向のベクトルがたくさん出て来るから重なって見にく

くなるわよ」



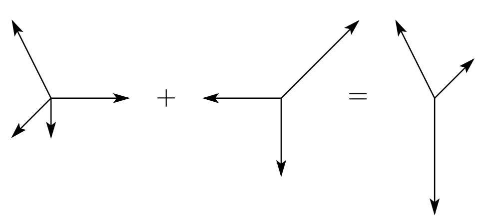
「それを今説明しようと思っていたんだが，先に言われちゃったな．そういうのは足し合わせて長いベクトルにしちゃうんだ．それだけじゃないよ．向きが反対のベクトル同士は打ち消し合う．つまり長い方から短い方を引いちゃう．そうするとこの階段の周ベクトル図はどうなる？」

「えーと，横向きのベクトルは，階段の上辺 3 つと下辺で，互いに打ち消し合うし，縦向きもそうだから，あれ，無くなっちゃった．……やーだ．要はベクトルを足し算するのよね．多角形を一周するんだからゼロになるの当たり前じゃない．ほら，さっきのやつだって，平行四辺形を描いてちゃんと足し算すればゼロベクトルになるわよ」

「おや，学校で習ったこともたまには身に付いてるんだな．でも，ここは話が違うのさ．足していいのは平行なベクトルだけ．他はそのまま図に描く」

「変なの」

「ここからが話の核心だ．周ベクトル図同士の足し算と言うのを考えるよ．これは簡単だ．方向の同じベクトル同士はつなぐ．反対なら互いに打ち消し合う．方向が同じでも反対でもなければほっとく．例えば



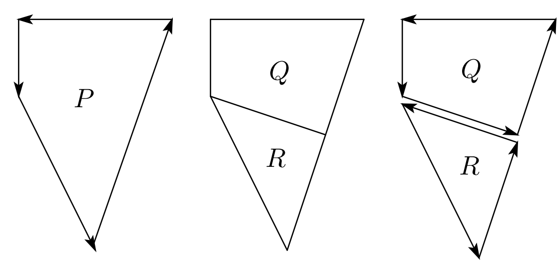
というわけだ．互いに平行でないベクトルは無数にあり，足し算をするときにそれらは無関係として扱うから，周ベクトル図の集団は，数学的に難しく言うと『無限次元実ベクトル空間』の例になるんだけど，それも今はいい．大切なのは，分割や点対称移動，平行移動との関係だ．多角形を点対称移動すると，周ベクトル図はどう変わる？」

「そんなの簡単よ．全部のベクトルが逆向きになるんだから，周ベクトル図も 180 度反転するわ．ついでに答えておくけど，平行移動しても周ベクトル図は，変わるわけないわね．当たり前よ」

問題 4.1. 布地の両面に同じ矢がすり模様があるとすれば，裏返すという操作が一定方向の軸に対してなら許される．その裏返し操作で周ベクトル図はどう変化するか？

「そうさ．次は分割だ．今，多角形 P があるとして，それを Q，R という 2 つの多角形に分割したら，P，Q，R の周ベクトル図の関係はどうなるかな？」

「ははあ，パパが周ベクトル図同士の足し算なんてものを持ち出した思惑が分かって来たわ．P の周ベクトル図は，Q と R の周ベクトル図の和になるって言うんでしょ．でも，どうしてかしら……あ，そうか．P を Q と R に分けている辺を考えると，その辺に関する周ベクトルは，Q と R では反対向きなのね．だから，両方の周ベクトル図を足すとそこの部分は打ち消しあう．一方，P で考えるとそんな辺はそもそもないのだから，初めから周ベクトル図には出てこない．それと，P の 1 つの辺が Q と R で 2 つに分かれている場合，それらの辺に関する周ベクトルの向きは，全部同じだから，Q と R の分を足すと P の分に戻る」



「ははは，読まれちゃったか．でもご名答だ．で，元の問題に戻るけど……」

「あ，分かったような気がするわ．つまり，多角形をどう分割しても，各断片の周ベクトル図の総和は，元の多角形の周ベクトル図になるってことよね．それでもって，平行移動しても周ベクトル図は変わらないのだから，互いに T-分解合同な多角形って，同じ周ベクトル図を持たなきゃいけない」

「そう．もう分かったろう．平行四辺形の周ベクトル図は，どれもさっきの階段図形と同じでゼロだ．もちろん長方形もそうだ．一方，三角形の辺はどれも平行でないから，周ベクトル図はゼロではない．よって，三角形と長方形は T-分解合同ではあり得ない」

「確かにね．でも，分解合同でないと聞いてかえって安心したわ．ママがね，矢がすりのいい布地を手に入れたって言ってたのよ．気の早いことに，私が大学を卒業するときの晴れ着がどうのって．そんなの 5 年近くも先でしょ．虫に食われちゃうのは確実よ．そこにパパが登場して来て，パッチワークで晴れ着を作ってくれても，ちょっとねえ……」

「お，面白いじゃないか．つぎはぎで，しかも，ところどころ矢の向きが反対っていうのも斬新かもしれない．是非，そういうのにしたらどうだ．それに分からんぞ．そういう布地なら，回転はだめだけど，裏返しにするって手が使えるかもしれないし．

問題 4.2. 平行移動のほかに一定方向の直線を対称軸にして多角形を裏返す操作が許されたとしたら，同面積の多角形はどれも分割合同になるだろうか (ヒント: 周ベクトルのうち対称軸に対して垂直なものだけを考えよ)?

「まあ，冗談はさておき，実は，多角形同士が T-分解合同であるための必要十分条件は，周ベクトル図と面積が等しいことなんだよ」

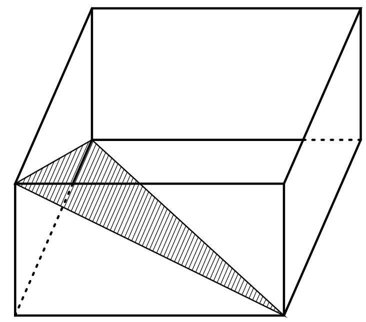
「なるほどね．でも，その証明はいいわ．もう，だいたい分かったし，疲れちゃったもの」

5　6 分の 1 升

父の残念そうな顔を尻目に，花子が再びマンガを手にしたやさき，台所から声がした．

「ねえ，花子，お米を研ぐのを手伝って．1/6 升よ」

ここで「イヤ」と言うと，かえってマンガの続きにさしつかえるという判断から，花子は素直に台所に直行し，1 升マスを使って器用に 1/6 升の米を量った．これは，父の伝授によるもので，マスの底面の対角線と上面の頂点を通る面 (下図の斜線の面) が水平になるようにマスを傾け，水や米を盛るのだ．



米を研ぎ終わって，居間に戻って来ると，ふと新しい疑問が頭をよぎった．

「ねえ，パパ，あの 1/6 升の量り方だけど，元のマスと比べると，底面積が半分で高さの等しい三角錐だから体積が 1/6 って言うのはわかるのよ．でも，そもそも角錐や円錐が角柱や円柱の 1/3 といわれても?……あ，バカにしないでね．数学 II の時間に定積分の応用でやったから，理屈では分かってるのよ．でもね，図で見てパッと納得できなのかなと思って……例えば，円錐は無理としても，三角錐なら同じのを 3 つ持って来て，底面積と高さが同じ三角柱を組み立てられるとか」

「できないかい？考えてごらん」

花子は，図を描いて考えてみたが，できそうもないことはすぐに分かった．

「ダメね」

「切り貼りしたらできないかい？」

「さっきの問題の立体版よね．それも考えたんだけど，立体の切り貼りを考えるのはややこしくて……うーん，でも平面でうまくいくんだから，立体でもできると思うわ．ただどうやればいいのか」

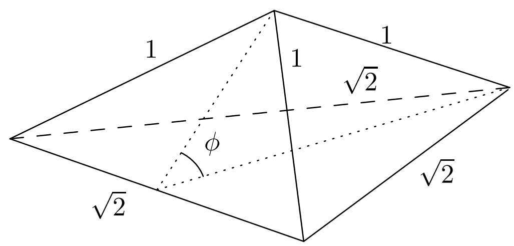
「分からないだろ．実は，それについては，デーンの定理というのがあるのさ．話を簡単にするため，マスの形は一辺の長さが 1 の立方体とするよ．それを 3 頂点を通る平面で切ってできる三角錐を考える．この三角錐が 6 つあるとき，それら合わせたものと元の立方体が分解合同かというと……」

父は，うまく話題に載ってきた娘を相手に，再び得々と講義をし始めた．花子は,「しまった」と思った

がちょっと興味もあるので，マンガをあきらめ，講義に聴き入ることになった．

要点は，こういうことだった．

多面体の辺全部を適当に並べて，それぞれの長さ l とその辺を挟む 2 つの面のなす角 α の対 $\langle l, \alpha \rangle$ のリストを作る．上の立方体の場合，各面はどれも垂直に交わり，12 辺全部が長さ 1 であるから，対 $\langle 1, \pi/2 \rangle$ が 12 個並んだリストになる．一方，問題の三角錐の場合，立方体を切ってできた新しい面と元の立方体の面が交わる角度を ϕ とすると，対 $\langle 1, \pi/2 \rangle$ と対 $\langle \sqrt{2}, \phi \rangle$ が 3 つずつ並んだリストになる．



問題 5.1. $\cos\phi$ を求めよ．それを用いて ϕ が 2π の有理数倍でないことを証明せよ．

今，2 つの多面体が分解合同とし，それぞれについて，辺の長さと角度の対をリストにしたものを $\langle l_1, \alpha_1 \rangle, \langle l_2, \alpha_2 \rangle, \ldots, \langle l_r, \alpha_r \rangle$ と $\langle m_1, \beta_1 \rangle, \langle m_2, \beta_2 \rangle, \ldots, \langle m_s, \beta_s \rangle$ とする．このとき，条件

$$f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta), \quad f(2\pi) = 0$$

を満たすように各角度 α に対して実数 $f(\alpha)$ を割り当てると，$l_1 f(\alpha_1) + l_2 f(\alpha_2) + \cdots + l_r f(\alpha_r)$ と $m_1 f(\beta_1) + m_2 f(\beta_2) + \cdots + m_s f(\beta_s)$ は，必ず等しくなることが示される．

問題 5.2. q が有理数なら $f(q\alpha) = qf(\alpha)$ であることを示せ．よって，α が 2π の有理数倍であれば，$f(\alpha) = 0$ である．

ここで，立方体問題の三角錐 6 つと分解合同だと仮定し，それぞれのリストをこの式の両辺に当てはめると，どんな割り当て f に対しても

$$0 = 12f(\pi/2) = 18f(\pi/2) + 18f(\phi) = 18f(\phi)$$

が成立しなければならない．ところが，ϕ が 2π の有理数倍でないことから，$f(\phi) \neq 0$ となる割り当て f が存在することが示される．これは矛盾であるから，立方体と問題の三角錐 6 つは分解合同ではあり得ない．

父の講義が終わり，花子が定理の結論を受け入れたときには，外は薄暗くなりかけていた．居間の明かりがともり，母が台所から顔を出した．

「随分，熱心にやってたじゃない．パパの思う壺にはまっちゃったわね．今，炊飯器のスイッチを入れたから，もうすぐご飯よ．もう，そのくらいにしてお風呂に入ったら」

「パパの講義，下手なんだもの．頭使って疲れちゃったわ．じゃあ，パパ，先にお風呂もらってもいい？」

「いいとも，いいとも」といって，父が急いで書斎に戻りかけるのと同時に，小さなパチッという音とともに，突然，明かりが消えた．

「あ，さっきエアコンのテストをしてスイッチを切るのを忘れてたわ」と母の声．

炊飯器のせいでブレーカがとんだのだ．見ると，つい今まで満足そうにしていた父の顔から笑みが消えていた．そういえば，さっきゲーム機のモニタのスイッチを切るのを見たが，本体の電源を落としていた様子はなかった．当然，それまでのプレーのセーブもしていないだろう．

浴室に向かう途中で，ブレーカのスイッチを上げながら，花子は思った．

「ちょっと可哀想だけど，あたしだってマンガの邪魔されちゃったんだし……パパだって，たまには家でゲーム以外のことをしててもいいんじゃない」

参考文献: 「面積と体積」ボルチャンスキー + ロプシッツ 著，木村君男 + 銀林浩 + 筒井孝胤 訳 (東京図書 (株)，1994 年)