「つむじ」の数を数えてみよう

筑波大学数学系　竹内 潔

1. トポロジーと曲面のオイラー数

　皆さんは「数学者は高次元の図形が見える」とかいう話をどこかで聞いたことはないでしょうか？　実際今から約１０年ほど前に森重文氏が数学界のノーベル賞ともいわれるフィールズ賞を受賞した際も、「森先生の理論は３次元の代数多様体、すなわち６次元の図形を解明された。　だから理解できるのは世界で１０人位しかいないほど、難しい」という尤もらしい説明がテレビ等ではなされていました。　しかし我々数学者にとって「高次元の図形を見る」ということは何も特別なことでは無く、さらに進んで無限次元の研究をしている数学者も沢山います。　勿論森氏のような飛び抜けた仕事は滅多には出来ませんが、我々にとっての「高次元の感覚」とは大学初年級で習う「線形代数」とこれからその一端をお話しする「トポロジー」という手法に他ならないのです。

さて、閉じた曲面の形を区別するとき我々は「穴（空洞）がいくつ空いているか」などの特徴に着目するのではないでしょうか？　確かに以下にあげる三つの曲面のうち最初の二つは同じような形をしていますが、最後のものは違う形に見えます。

（曲がりかたなどの細かいことは無視して）こうして図形の一番基本的な特徴に目を向けるとき我々は、「ある図形をじょじょに変形して得られる図形は同じとみなそう」という発想に到達します。　例えばコーヒーカップはドーナツに連続的に変形していくことができます。

コーヒーカップもドーナツも穴の数は一つなので、幾何的な構造は何も変っていないことになります。　トポロジー（位相幾何学）という数学の理論は、「各図形にその穴の数など

の（連続的に変形しても変らない）幾何的な量を定義して、目に見えない高次元の図形もその量によって視覚化する」という理論なのです。　これは１９世紀末にフランス人の天才数学者ポアンカレ（Poincaré）が発見した理論で、我々が高次元という暗闇の世界を見るときにサーチライトの役割を果たしてくれます。

高次元の図形（「多様体」という研究対象など）は皆さんが大学に入って学習することですので、これからは２次元の曲面だけを考えます。　２次元の閉じた曲面は以下の図のようにその穴の数 g で分類できます（クラインの壷のようなものは除いています)。

球面（$g = 0$）　トーラス（$g = 1$）　二人乗りの浮き輪（$g = 2$）

ポアンカレに先立つこと百数十年も前にオイラー（Euler）は、曲面の「オイラー数」を以下のように定義しました。　与えられた曲面 S の表面を（曲がった）三角形で埋め尽くして、そのときに曲面上にできる三角形の面、辺、頂点の数を用いて

$$S \text{ の「オイラー数」：} E(S) = \{\text{面の数}\} - \{\text{辺の数}\} + \{ox\ \text{頂点の数}\}$$

と定めるのです。　すると驚くべきことに、この「オイラー数」$E(S)$ は曲面 S の三角形分割をどう取っても同じ数になることが証明できます。　例えば球面は正八面体と正二十面体を球にふくらませた三角形分割を持ちますが、それぞれの分割の仕方で決まる「オイラー数」は同じ数 「2」になります。

実はより一般に穴が g 個空いた曲面 S の「オイラー数」$E(S)$ は「$2-2g$」になるのですが、このことは各自で確かめてみて下さい。　穴が一つの曲面（ドーナツの表面）を「トーラス」と呼びますが、トーラスの「オイラー数」が「0」であることを後で使います。

2. ベクトル場とその指数

　ここでは、さらにその2次元の曲面 S に沿って風が吹いている様子を想像してみてください。　これは数学的には次のように表現することができます。　曲面 S の各点 p を通り S に接する平面（接平面）T_p を取り、その接平面 T_p の中に点 p を始点とするベクトル $\vec{X_p}$ を一つ選びます。　こうして曲面 S の各点 p にたいして接ベクトル $\vec{X_p}$ を与えたものを曲面 S 上の「（接）ベクトル場」と呼び、$\vec{X} = \{\vec{X_p}\}_{p\in S}$ と書きます。

例えば地球を宇宙から見ると、雲の流れの様子によって地球上の風は地表に沿って吹いていることがわかります。　しかも大気の流れの強さと方向は地表の各点で少しずつ変化しますから、各点で風向きを表わすベクトルを立てていくとこれは球面上の「ベクトル場」になります。　皆さんも天気予報で気象衛星「ひまわり」から撮影した地球の様子を見たことがあるでしょう。　このようにベクトル場は、水や空気の流れや電気力など空間の各点においてベクトルが与えられている状況を表現するのに便利な数学の用語なのです。
ここでは自然な条件として点 p を動かしたときに接ベクトル $\vec{X_p}$ が急にジャンプすることがないとします（大学生の言葉では「連続な」ベクトル場のみを考えます）。

さて曲面 S 上のベクトル場 $\vec{X} = \{\vec{X_p}\}_{p\in S}$ がある点 $p \in S$ においてゼロ、つまり $\vec{X_p} = \vec{0}$ だったとしましょう。　このような点 p をベクトル場 $\vec{X} = \{\vec{X_p}\}_{p\in S}$ の「特異点」と呼びます。　以下にそのような特異点 p のまわりの様子をいくつか例示してみましょう。

これらの例に共通することは「特異点 p のすぐ近くには別の特異点は無く、孤立している」ということです。　以下ではベクトル場の特異点はすべて孤立しているとします。　ここでベクトル場の特異点のまわりの小円周を反時計周りに（数学では反時計周りが正の向きです）一周したときにベクトルの向きが何回転するかを調べましょう。　上の例の各特異点のまわりでこの「ベクトル場の回転数」を調べた結果は以下の通りです。

まったく様相が異なるのに同じ回転数を持つ場合があることや、非常に複雑な状態なのに回転数はゼロという状況があることにビックリされたでしょうか？　この回転数をベクトル場 $\vec{X} = \{\vec{X}_p\}_{p \in S}$ の特異点 p における「指数」(index) と呼びます。

3. ポアンカレの定理

今や我々は、次のポアンカレによる見事な定理を紹介することができます。

定理（ポアンカレ）：曲面 S 上のベクトル場 $\vec{X}$ の特異点における指数の和は S のオイラー数 $E(S)$ に等しい。　すなわち $\vec{X}$ の特異点を $p_1, p_2, \cdots, p_n$ とし各特異点 p_j $(j = 1, 2, \cdots, n)$ でのベクトル場 $\vec{X}$ の指数を $i(\vec{X}; p_j)$ とすると次が成り立つ。

$$E(S) = \sum_{j=1}^{n} i(\vec{X}; p_j)$$

球面のオイラー数は「2」でしたから、定理により球面上には特異点のないベクトル場は存在し得ないことになります。　すなわち常に地球上のどこかには完全に無風状態の地点が存在することになります。　「ひまわり」から撮った地球の写真にも、よく風が渦を巻いている箇所（多分台風の目でしょう）がありましたね。　これらの渦のまわりでの風向きの回転数を足すと、いついかなるときでも「2」になるのです。　また人の頭を球に見立ててそのまわり全体に髪の毛が生えているとすると、どう髪の毛を撫でつけてもどこかに「つむじ」が一箇所は出来てしまうことになります。　皆さんも子供の頃ぬいぐるみの毛などを撫でたりしてこの事は経験的に知っていると思います。　またトーラスのオイラー数は「0」ですから特異点の無いベクトル場がその上に作れそうですが、実際上の図の 一つはそのようなベクトル場の例を表わしています。

ポアンカレの定理は曲面上のどんなベクトル場についてもそれが成り立つという意味で、非常に美しい定理です（数学者の考える定理の「美しさ」とはなかなか説明し難いですが、「シンプルでいて一般性が高い」とか「調和感が深まる」という感じです。)。　地球上の風向きは各場所でてんでバラバラですが、集団としてはちゃんと乗っている地表の球面としての形（オイラー数）を知っているのです。

4. ポアンカレの定理の証明

　ポアンカレの定理の証明は比較的簡単です。　曲面 S 上にベクトル場 $\vec{X} = \{\vec{X}_p\}_{p\in S}$ が与えられており、その特異点を $p_1, p_2, \cdots, p_n$ とします。　各特異点 p_j $(j = 1, 2, \cdots, n)$ でのベクトル場の指数を $i(\vec{X}; p_j)$ として等式

$$E(S) = \sum_{j=1}^{n} i(\vec{X}; p_j)$$

を証明すればよいわけです。

(1) まずこの等式が成り立つようなベクトル場 $\vec{Y}$ が一つ存在することを示します。　曲面 S の三角形分割 $S = \delta_1 \cup \delta_2 \cup \cdots \cup \delta_m$ を何か一つ選びます。　このとき各三角形 δ_i 上で次の図のようになるように S 上のベクトル場 $\vec{Y} = \{\vec{Y}_p\}_{p\in S}$ をとれば、

その特異点での指数の総和はオイラー数

$$\{\,面の数\,\} - \{\,辺の数\,\} + \{\,頂点の数\,\} = E(S)$$

になります。

(2) あとは二つの S 上のベクトル場 $\overset{ightarrow}{X}$ と $\vec{Y}$ について、それらの特異点での指数の和が同じ数になることを証明すればよい訳です。　この二つのベクトル場の特異点をすべて合わせて $q_1, q_2, \cdots, q_N$ と書き直します。　ここで各特異点 q_k を中心に持つ十分小さな曲面 S 上の三角形 α_k を取って、この三角形の中には点 q_k 以外の他の特異点を含まないようにできます。　さて、これらの N 個の三角形 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N$ だけではまだ曲面 S を覆えてない場合もありますから、さらにいくつか三角形 $\alpha_{N+1}, \alpha_{N+2}, \cdots, \alpha_M$ を加えて曲面 S の三角形分割を完成します。　それらの中心の点を一つずつ選んで q_k $(k = N+1, N+2, ots, M)$ と書きます。

$$S = \alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \cdots \cup \alpha_M$$

ここで各三角形 α_k の縁（へり） $\partial\alpha_k$ の各点 p にたいして角度 $0 \leq \theta(p) \leq 2\pi$ を

$$\theta(p) = \{\,接ベクトル\ \vec{Y_p}\ から接ベクトル\ \vec{X_p}\ までの角度\,\}$$

で定義します。

そして角度 $\theta(p)$ の位置にある単位円 $C = \{x^2 + y^2 = 1\}$ 上の点を $f_k(p)$ と置けば、写像

$$f_k : \partial\alpha_k \longrightarrow C = \{x^2 + y^2 = 1\}$$

が作れ、点 p が α_k の縁 $\partial\alpha_k$ を一周するとき $f_k(p)$ が C のまわりを何周するかという整

数 A_k が決まります（これを写像 f_k の「写像度」と呼んでいます）。　すると三角形 α_k の中心の点 q_k が二つのベクトル場 $\vec{X}$ と $\vec{Y}$ の共通の特異点である場合は、次の等式が成り立ちます（色々絵を書いてみて納得して下さい。　厳密な証明はここではしません。）。

$$A_k = i(\vec{X}; q_k) - i(\vec{Y}; q_k)$$

また q_k がベクトル場 $\vec{X}$ の特異点だが $\vec{Y}$ の特異点ではないとすると

$$A_k = i(\vec{X}; q_k) - 0$$

などの事実が成立します。　従って結局

$$\{\text{ベクトル場 } \vec{X} \text{ の特異点での指数の和}\} - \{\text{ベクトル場 } \vec{Y} \text{ の特異点での指数の和}\} = \sum_{k=1}^{M} A_k$$

となります。　ここで最後の $\sum_{k=1}^{M} A_k$ が 0 になってくれれば証明が完成するのですが、その理由は講義でお話しましょう。　（証明終わり）

このポアンカレの定理は 2 次元の曲面だけでなく、高次元の曲面でも成立します。　いずれにせよこの定理は、特性類などの非常に進んだ現代数学で発見された対象が、その一端を我々の前に見せている興味深い一例といえます。　その延長線上にはさらに深く神秘的な世界が開けており、それらを正確に理解するためには線形代数やホモロジーなどの理論が必要になります。　また上記の証明を厳密にやるには、本当は「連続性」や「位相」などについて少しは知らなければなりません。　今回は議論の厳密性には少々目をつぶって、大学における数学の面白さ、自由さが伝えられるよう、気楽にやってみました。　皆さん楽しんで頂けたでしょうか？

参考文献　河田敬義「位相数学」共立出版