平成２６年度

筑波大学大学院 数理物質科学研究科 入学試験

数学専攻 試験問題

専門科目

注意事項

1. 問題冊子はこの表紙を入れて６枚からなる。試験開始の合図があるまでは問題冊子を開けないこと。

2. 問題は専門基礎課題が３題（[1],[2],[3]）と専門課題が４題（[4],[5],[6],[7]）の合計７題ある。そのうち４題選択し解答せよ。ただし，
[4] を選択する場合には (A), (B) のいずれか一つに答えよ。両方を選ぶことはできない。
[5] を選択する場合には (C), (D) のいずれか一つに答えよ。両方を選ぶことはできない。
[7] を選択する場合には (E), (F), (G) のいずれか一つに答えよ。二つ以上を選ぶことはできない。

3. 答案冊子は答案用紙４枚からなる。それぞれの答案用紙に，研究科名・専攻名・受験番号を記入すること。解答は答案用紙１枚につき１題とし，それぞれの答案用紙の左上に解答する問題番号を記入せよ。また，[4], [5], [7] では (A), (B), (C), (D), (E), (F), (G) の記号も記入せよ。おもて面だけで書ききれない場合には,「ウラへ」と明記して裏面を使用してよい。

4. 下書用紙は４枚ある。それぞれの下書用紙に，研究科名・専攻名・受験番号を記入すること。

5. 問題冊子も下書用紙も回収する。

数学

注意　$\mathbb{C}$ は複素数全体, $\mathbb{R}$ は実数全体, $\mathbb{Q}$ は有理数全体, $\mathbb{Z}$ は整数全体, $\mathbb{N}$ は自然数全体をそれぞれ表すものとする.

[1] 次の問いに答えよ.

(1) 自然数 n に対して，$I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\theta d\theta$ とおく．このとき，

$$I_1 = \frac{\pi}{4}, \quad I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1} \ (n \geq 2)$$

であることを示せ.

(2) $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ -x \leq y \leq x\}$ とおく．このとき，重積分

$$\iint_D (x+y)^{10} dxdy$$

を計算せよ.

[2] 0 でない実数 a に対し, 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{pmatrix}$$

で定める.

(1) A の階数 $\operatorname{rank} A$ を求めよ.

(2) a を $\operatorname{rank} A = 2$ となる値とする．このとき, A が与える線形写像

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

の像 $\mathrm{Im} f$ と核 $\mathrm{Ker} f$ の基底を 1 組ずつ求めよ.

(3) a を $\operatorname{rank} A = 1$ となる値とする．このとき, A の固有値をすべて求め, $P^{-1}AP$ が対角行列となるような直交行列 P を 1 つ求めよ.

数学

[3] X, Y, Z を集合, $f : X \to Z$ および $g : Y \to Z$ を写像とする. $A = \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\}$ とし, $\pi : A \to Y$ を $\pi(x, y) = y$ で定める.

(1) f が単射ならば, π も単射であることを示せ.

(2) f が全射ならば, π も全射であることを示せ.

[4] 次の **(A), (B)** のうち **1つを選び** 解答せよ.

(A) 複素数体の乗法群 $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ を考える.

(1) $\zeta_3 = \cos\frac{\pi}{3} + \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{3}, \zeta_5 = \cos\frac{\pi}{5} + \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{5} \in \mathbb{C}^\times$ とおく. ζ_3, ζ_5 で生成される $\mathbb{C}^\times$ の部分群 $\langle\zeta_3, \zeta_5\rangle$ が巡回群であることを示せ.

(2) G を $\mathbb{C}^\times$ の有限部分群, $z \in G$ とする. このとき $|z| = 1$ であることを示せ.

(3) $\mathbb{C}^\times$ の有限部分群は常に巡回群となることを示せ.

(B) 体 k 上の 1 変数多項式環 $k[T]$ と 2 変数多項式環 $k[X, Y]$ について, 次の問いに答えよ.

(1) 写像

$$\phi : k[X, Y] \to k[T], \quad \phi(f(X, Y)) = f(T^2, T^3)$$

が環準同型であることを示せ.

(2) この ϕ の核 $\operatorname{Ker}\phi$ が $X^3 - Y^2$ の生成するイデアル $(X^3 - Y^2)$ に一致することを示せ.

(3) 剰余環 $k[X, Y]/(X^3 - Y^2)$ が整域であることを示せ. また, この整域の商体を求めよ.

$\boxed{\textbf{数学}}$

[5] 次の **(C), (D)** のうち **1つを選び** 解答せよ.

(C)

$$\boldsymbol{x}(u,v) = \big(u\cos v,\ u\sin v,\ v\big) \qquad (u, v \in \mathbb{R})$$

によりパラメータ表示される xyz-空間内の曲面 M を考える．$\boldsymbol{n}(u,v)$ を M の単位法ベクトルとし，実数 t に対して

$$\boldsymbol{x}_t(u,v) = \boldsymbol{x}(u,v) + t\,\boldsymbol{n}(u,v)$$

と定める．次の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{n}(u,v)$ を求めよ．また，$\dfrac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial u}, \dfrac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial v}$ を $\dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u}, \dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v}$ を用いて表せ.

(2) $\dfrac{\partial \boldsymbol{x}_t}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{x}_t}{\partial v} = \{1 - t^2(1+u^2)^{-2}\}\dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v}$ を示せ.

(3) 写像 $\boldsymbol{x}_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ がはめ込みとなる t の範囲を求めよ.

(D) 次を示せ.

(1) ハウスドルフ空間 X の部分空間 A はハウスドルフ空間である.

(2) コンパクト空間 X の閉集合 F はコンパクトである.

(3) コンパクト・ハウスドルフ空間 X と $x_0 \in X$ に対して，部分空間 $X - \{x_0\}$ は局所コンパクト・ハウスドルフ空間である.

数学

[**6**] $\mathbb{R}$ 上ルベーグ可積分関数 g に対して，

$$g_R(x) = g\left(\frac{x}{R}\right) \ (R > 0),\ \mathcal{F}[g](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} g(x) dx \ (\xi \in \mathbb{R})$$

と定義する．このとき，次の問いに答えよ．

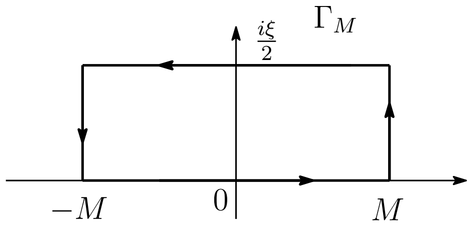
(1) $\mathcal{F}[g_R](\xi) = R\ \mathcal{F}[g](R\xi)$ を示せ．

以下，$g(x) = e^{-x^2}$ とおく．

(2) 下図のような積分路 Γ_M に対して，複素積分 $\displaystyle\int_{\Gamma_M} g(z) dz$ を考えることにより

$$\mathcal{F}[g](\xi) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{\xi^2}{4}}$$

を示せ．ただし，必要であれば $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ を用いて良い．



(3) f を $\mathbb{R}$ 上有界で連続な関数とする．このとき，

$$\lim_{R \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[g_R](y - x) f(y) dy = f(x)$$

となることを示せ．

[7] 次の (E), (F), (G) のうち **1つを選び** 解答せよ.

(E) $(A, <)$ を非可算の整列順序集合として，$a_0 \in A$ をその最小元とする．写像 $f : A \to A$ は,

$$f(a) < a \quad (\forall a \in A \setminus \{a_0\}), \quad f(a_0) = a_0$$

を満たすとする.

(1) A には無限下降列が存在しないことを示せ.

(2) $a \in A$ が与えられたとき，$f^n(a) = a_0$ となる $n \in \mathbb{N}$ が存在することを示せ.

(3) $B_n = \{a \in A : f^n(a) = a_0\}$ が非可算集合となる $n \in \mathbb{N}$ が存在することを示せ.

(4) 像 $f(C)$ が一点集合となる非可算集合 $C \subset A$ の存在を示せ.

注意．空でない部分集合が必ず最小元を持つ順序集合を整列順序集合と呼ぶ.

(F) 方程式 $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ の根の 1 つを α とする．$\alpha^2 + \alpha$ の逆数を $A\alpha^2 + B\alpha + C$ の形に表わせ．ただし，A, B, C は有理数とする.

(G) 確率ベクトルの列 $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ が互いに独立に，いずれも平均 (μ, μ), 分散共分散行列 $\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$ をもつ 2 変量正規分布に従うとする．ただし，$n \geq 3$ で $|\rho| < 1$ とする．いま μ の推定量として

$$\hat{\mu} = \hat{\mu}(\alpha) = \alpha\bar{X} + (1-\alpha)\bar{Y} \quad (\alpha : \text{実数}) \tag{$*$}$$

を考える．ただし，$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i, \bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i$ とする．このとき次に答えよ.

(1) $\hat{\mu}$ の分散 $\mathrm{var}(\hat{\mu})$ を求めよ.

(2) $\mathrm{var}(\hat{\mu})$ を最小にする α を求めよ．また，$\sigma_1 = \sigma_2$ でその値が既知のとき，$\mathrm{var}(\hat{\mu})$ を最小にする $\hat{\mu}$ を求めよ.

(3) ρ, σ_1, σ_2 がすべて未知のとき，$\hat{\mu}$ の定義式 $(*)$ における α を

$$\hat{\alpha} = \frac{S_Y^2 - S_{XY}}{S_X^2 + S_Y^2 - 2S_{XY}}$$

で置き換えた $\tilde{\mu} = \hat{\alpha}\bar{X} + (1-\hat{\alpha})\bar{Y}$ は μ の不偏推定量となることを示せ．ただし，$S_X^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, S_Y^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2, S_{XY} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$ とする.