平成２５年度

筑波大学大学院 数理物質科学研究科 入学試験

数学専攻 試験問題

専門科目

注意事項

1. 問題冊子はこの表紙を入れて６枚からなる。試験開始の合図があるまでは問題冊子を開けないこと。

2. 問題は専門基礎課題が３題（[1],[2],[3]）と専門課題が４題（[4],[5],[6],[7]）の合計７題ある。そのうち４題選択し解答せよ。ただし,
[5] を選択する場合には (A), (B) のいずれか一つに答えよ。両方を選ぶことはできない。
[7] を選択する場合には (C), (D), (E) のいずれか一つに答えよ。二つ以上を選ぶことはできない。

3. 答案冊子は答案用紙４枚からなる。それぞれの答案用紙に，研究科名・専攻名・受験番号を記入すること。解答は答案用紙１枚につき１題とし，それぞれの答案用紙の左上に解答する問題番号を記入せよ。また，[5], [7] では (A), (B), (C), (D), (E) の記号も記入せよ。おもて面だけで書ききれない場合には,「ウラへ」と明記して裏面を使用してよい。

4. 下書用紙は４枚ある。それぞれの下書用紙に，研究科名・専攻名・受験番号を記入すること。

5. 問題冊子も下書用紙も回収する。

数学

注意　$\mathbb{C}$ は複素数全体, $\mathbb{R}$ は実数全体, $\mathbb{Q}$ は有理数全体, $\mathbb{Z}$ は整数全体, $\mathbb{N}$ は自然数全体をそれぞれ表すものとする.

[**1**]

$$U := \left\{ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -\frac{\pi}{2} < b < 0 < a < \frac{\pi}{2} \right\}$$

とおいて, $(a,b) \in U$ に対し, 直線 $x=0$, $x=a-b$, $x-y+b-\pi=0$, $x-y=0$ で囲まれる領域を $D_{a,b}$ とする. $f\colon U \to \mathbb{R}$ を

$$f(a,b) = \iint_{D_{a,b}} \sin y \, dx \, dy$$

で定義する.

(1) 積分

$$\iint_{D_{a,b}} \sin y \, dx \, dy$$

を計算せよ.

(2) 関数 f の全ての極値とそれを与える点を求めよ.

[**2**] 次の正方行列 A について以下の問いに答えよ.

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 9 & -3 & -\sqrt{2} \\ -3 & 9 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 6 \end{pmatrix}$$

(1) 3 は A の固有値であることを示せ.

(2) A の固有値をすべて求めよ.

(3) (2) で求めた A の固有値を $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ とおく. 固有値 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ のそれぞれに対応する A の固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ で, $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底をなすものを一組求めよ.

(4) 行列 A^n $(n \in \mathbb{N})$ を求めよ.

$\boxed{\textbf{数学}}$

[3] 空でない集合と写像の列

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$$

において $g \circ f : A \to C$ は全射，$h \circ g : B \to D$ は単射であるとする．次を示せ.

(1) g は全単射である.

(2) f は全射である.

(3) h は単射である.

[4] $\mathbb{Q}[x, y]$ を有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の 2 変数多項式環とし, $\mathbb{Q}[x, y]$ の部分集合 I を

$$I = \{f(x, y) \in \mathbb{Q}[x, y] \mid f(0, 0) = 0\}$$

で定める.

(1) I は $\mathbb{Q}[x, y]$ のイデアルであることを示せ.

(2) I は $\mathbb{Q}[x, y]$ の極大イデアルであることを示せ.

(3) I は単項イデアルでないことを示せ.

$\boxed{\textbf{数学}}$

[5] 次の **(A), (B)** のうち**1つを選び**解答せよ.

(A) 正の数 $R > r > 0$ に対して,

$$\mathbf{x}(u, v) = ((R + r\cos u)\cos v, (R + r\cos u)\sin v, r\sin u)\,, \quad u, v \in \mathbb{R}$$

によりパラメータ表示される xyz-空間内のトーラス T^2 を考える. また関数 $f\colon T^2 \to \mathbb{R}$ を

$$f(x, y, z) = y + z$$

により定め, $\tilde{f} = f \circ \mathbf{x}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ とおく.

(1) f の臨界点は 4 つ存在する. それらをすべて求めよ. ただし, 点 $\mathbf{x}(u, v)$ が f の臨界点であるとは, $\tilde{f}$ の (u, v) におけるヤコビ行列がゼロの場合である.

(2) $\{\, p_1, p_2, p_3, p_4 \,\}$ を (1) で求めた臨界点集合とし, $p_i = \mathbf{x}(u_i, v_i)$, $1 \le i \le 4$ とするとき, 行列

$$A_i = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial u^2}(u_i, v_i) & \dfrac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial u \partial v}(u_i, v_i) \\ \dfrac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial v \partial u}(u_i, v_i) & \dfrac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial v^2}(u_i, v_i) \end{pmatrix}$$

を求めよ.

(3) A_i の負の固有値の個数を k_i とするとき, $\displaystyle\sum_{i=1}^{4}(-1)^{k_i}$ を求めよ.

(B) $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ とする. $p : S^1 \to \mathbb{R}$ を $p(x, y) = x$ により定める. ここで $\mathbb{R}$ はユークリッド位相が与えられた実数直線である. S^1 の位相は $\{p^{-1}(O) \mid O\colon \mathbb{R}$ の開集合$\}$ で与えられるとする. 次を示せ.

(1) S^1 の位相は, ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ から定まる S^1 上の相対位相より粗い位相である.

(2) S^1 はハウスドルフ空間ではない.

(3) $S^1 \setminus \{(0, 1)\}$ はコンパクトである.

(4) $S^1 \setminus \{(0, 1)\}$ と $S^1 \setminus \{(1, 0)\}$ は同相でない.

数学

[**6**] 次の (1) および (2) に答えよ.

(1) 複素関数 $g(z)$ は $z=0$ の近傍で正則で，$g(0) \neq 0$ であるとする．$f(z) = z^2 g(z)$ とおくとき，次の問いに答えよ.

(a) $g(0), g'(0), g''(0)$ を $f^{(j)}(0)$ $(j = 0, 1, 2, \dots)$ を用いて表せ.

(b) $f''(z)/f(z)$ の $z=0$ における留数を $f^{(j)}(0)$ $(j = 0, 1, 2, \dots)$ を用いて表せ.

(2) $b > a > 0$ とし，$F(x)$ は $\mathbb{R}$ 上定義された連続微分可能な実数値関数で，$F'(x)$ は $\mathbb{R}$ 上でルベーグ可積分とする．このとき，次を示せ.

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{F(bx) - F(ax)}{x} dx = \int_a^b \left(\int_{\mathbb{R}} F'(tx) dx \right) dt$$

[**7**] 次の **(C), (D), (E)** のうち **1つを選び** 解答せよ.

(C) X を空でない集合とする．$O \subset X^2$ が X 上の順序であるとは，次が成立することである.

- 反射性： $(x, x) \in O \quad (\forall x \in X)$
- 推移性： $(x, y), (y, z) \in O \ \Rightarrow (x, z) \in O \quad (\forall x, y, z \in X)$
- 反対称性： $(x, y), (y, x) \in O \ \Rightarrow \ x = y \quad (\forall x, y \in X)$

X 上の順序全体を $\mathcal{P}$ とおく．以下では $O \in \mathcal{P}$ である．また $a, b \in X$ に対して，$O_{a,b} = \{(x, y) \in X^2 : (x, a) \in O, (b, y) \in O\}$ とおく．このとき次を示せ.

(1) $(a, b) \in O_{a,b}$.

(2) $(b, a) \notin O$ のとき，$(x, y), (y, z) \in O_{a,b}$ となる x, y, z は存在しない.

(3) $(b, a) \notin O$ のとき，$O \cup O_{a,b} \in \mathcal{P}$ である.

(4) O が $\mathcal{P}$ の中で包含関係に関して極大と仮定する．このとき任意の $a, b \in X$ は比較可能（$(a, b) \in O$ または $(b, a) \in O$）となる.

数学

(D)

(1) G を有限組み合わせゲーム，すなわち次のような性質を持つゲームとする。

- 2 人のプレーヤが交互に着手する。
- 2 人の着手にかかわらず有限手数で終了する。
- 定まった局面からの可能な着手があらかじめ全て決まっている。
- プレーヤに隠された情報はない。

このとき，G に引き分けが存在しなければ，先手か後手に必勝法があることを示せ。

(2) $(P, \preceq)$ を有限順序集合とする。2 人で交互に P の要素を言い合う次のようなゲームを考える。既に言われた要素以上の要素を言ったほうが負け，すなわち $p_1, p_2, \ldots, p_k$ が言われた後に $p_i \preceq p$ なる i が存在するような p を言うと負けである。

P に最大の要素があれば，上のゲームは先手必勝であることを証明せよ。

(3) (2) のゲームにおいて，P を 30 の正の約数の全体から 1 を除いたもの，$a \preceq b$ を「a が b を割り切ること」と定義したとき，最初に 30 を言うことで先手が勝てることを証明せよ。

(E) 確率変数 $X_1, ..., X_n$ $(n \geq 2)$ が，互いに独立に正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとする．ただし，μ は 0 でない実数，σ^2 は正の実数とする．標本平均を $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$，標本分散を $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{X})^2$ とおく．このとき，$\theta = \mu^2$ の推定量として，$\hat{\theta}_n = \bar{X}^2 - \frac{1}{n-1}S^2$ を考える．

(1) $\hat{\theta}_n$ が θ の不偏推定量であることを示せ．

(2) $\hat{\theta}_n$ の分散 $\mathrm{Var}_\theta(\hat{\theta}_n)$ を求めよ．

(3) $X_1, ..., X_n$ のもつ θ に関するフィッシャー情報量 $I_n(\theta)$ を求め，$\hat{\theta}_n$ の漸近効率 $\lim_{n\to\infty}(I_n(\theta)\mathrm{Var}_\theta(\hat{\theta}_n))^{-1}$ を計算せよ．