平成２９年度

筑波大学大学院 数理物質科学研究科 入学試験

数学専攻 試験問題

専門科目

注意事項

1. 問題冊子はこの表紙を入れて６枚からなる。試験開始の合図があるまでは問題冊子を開けないこと。

2. 問題は専門基礎課題が３題（[1],[2],[3]）と専門課題が４題（[4],[5],[6],[7]）の合計７題ある。そのうち４題選択し解答せよ。ただし，
[4] を選択する場合には (A), (B) のいずれか一つに答えよ。両方を選ぶことはできない。
[5] を選択する場合には (C), (D) のいずれか一つに答えよ。両方を選ぶことはできない。
[7] を選択する場合には (G), (H), (I) のいずれか一つに答えよ。二つ以上を選ぶことはできない。

3. 答案冊子は答案用紙４枚からなる。それぞれの答案用紙に，研究科名・専攻名・受験番号を記入すること。解答は答案用紙１枚につき１題とし，それぞれの答案用紙の左上に解答する問題番号を記入せよ。また，[4], [5], [6], [7] では (A), (B), (C), (D), (E), (F), (G), (H), (I) の記号も記入せよ。おもて面だけで書ききれない場合には,「ウラへ」と明記して裏面を使用してよい。

4. 下書用紙は４枚ある。それぞれの下書用紙に，研究科名・専攻名・受験番号を記入すること。

5. 問題冊子も下書用紙も回収する。

数学

注意　$\mathbb{C}$ は複素数全体, $\mathbb{R}$ は実数全体, $\mathbb{Q}$ は有理数全体, $\mathbb{Z}$ は整数全体, $\mathbb{N}$ は自然数全体をそれぞれ表すものとする.

[1]　$U = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < a < b\}$ とおく. U の点 (a,b) に対し

$$D_{a,b} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 - ax + y^2 \geq 0,\ x^2 - bx + y^2 \leq 0,\ y \geq 0\}$$

と定め, U 上の関数 f を

$$f(a,b) = \iint_{D_{a,b}} \frac{(x^2+3)y}{x^2+y^2} dxdy$$

で定義する.

(1) $D_{a,b}$ を極座標 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ を用いて表せ.

(2) $f(a,b)$ を計算せよ.

(3) U 上の関数 g を

$$g(a,b) = 8\,f(a,b) - 5(b^2 - a^2)$$

で定義する. 関数 g のすべての極値とそれを与える点を求めよ.

[2]　a を実数とする. $\mathbb{R}^4$ のベクトル

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に対し, $\boldsymbol{u}_1$ と $\boldsymbol{u}_2$ が張る $\mathbb{R}^4$ の部分空間を W_1 とし, $\boldsymbol{u}_3$ と $\boldsymbol{u}_4$ が張る $\mathbb{R}^4$ の部分空間を W_2 とする.

(1) W_1 と W_2 の次元を求めよ.

(2) $W_1 \cap W_2 = \{\boldsymbol{0}\}$ となるために a が満たすべき条件を求めよ.

(3) $W_1 \cap W_2 \neq \{\boldsymbol{0}\}$ のとき, $W_1 \cap W_2$ の基底を1組求めよ.

$\boxed{\text{数学}}$

[**3**] 集合 A の部分集合の族 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と写像 $f : A \to A$ について以下を示せ.

(1) $f\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n\right) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(X_n)$.

(2) $f : A \to A$ が単射ならば, $f(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(X_n)$.

(3) すべての $y \in A$ に対して $f^{-1}(\{y\})$ が有限集合であり, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $X_{n+1} \subset X_n$ が成り立つならば, $f(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(X_n)$.

[**4**] 次の **(A), (B)** のうち**1つを選び** 解答せよ.

(A) ベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ の元 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対して，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の標準内積を $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ で表す.

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

として

$$M = \{y_1\boldsymbol{b}_1 + y_2\boldsymbol{b}_2 \in \mathbb{R}^2 \mid y_1,\ y_2 \in \mathbb{Z}\}$$

とおくと，M は加法群 $\mathbb{R}^2$ の部分群である．さらに

$$L = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \text{すべての}\ \boldsymbol{y} \in M\ \text{に対して}\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{Z}\}$$

とする.

(1) L は M を含む $\mathbb{R}^2$ の部分群であることを示せ.

(2) L は加法群として $\mathbb{Z}^2$ と同型であることを示せ.

(3) 指数 $[L : M]$ を求めよ.

(B) $R = \mathbb{Z}[x]$ を整数環 $\mathbb{Z}$ 上の多項式環とする．整数 a に対して $I_a = (2, x^2 + ax + 1)$ を 2 と $x^2 + ax + 1$ で生成される R のイデアルとする.

(1) すべての a に対して，$I_a = I_{a+2}$ であることを示せ.

(2) 剰余環 R/I_a が体になるような a をすべて求めよ.

(3) R/I_a が $f \neq 0,\ f^2 = 0$ をみたす元 f を含むような a をすべて求めよ.

[5] 次の **(C), (D)** のうち **1 つを選び** 解答せよ.

(C) $\mathbb{R}^3$ の元 x の標準ノルムを $\|x\|$ で表す．C^∞ 級曲線 $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ が次の条件 (i)，(ii) を満たすとする.

(i) 任意の $s \in \mathbb{R}$ に対して $\|c(s)\| = r$ である．ただし，r は正の定数である.

(ii) 任意の $s \in \mathbb{R}$ に対して $\|c'(s)\| = 1$ である.

C^∞ 級写像 $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を次で定める.

$$\varphi(s,t) = c(s) + e^t\, c'(s)$$

(1) $\mathbb{R}^3$ の 2 つの元 x, y の標準内積を (x,y) で表す．すべての $s \in \mathbb{R}$ に対して

$$(c(s), c'(s)) = 0, \quad (c'(s), c''(s)) = 0, \quad (c''(s), c(s)) = -1$$

が成り立つことを示し，$r\,\|c''(s)\| \geq 1$ が成り立つことを示せ.

(2) φ ははめ込みであることを示せ.

(3) φ の第 1 基本量 E, F, G および第 2 基本量 L, M, N を c を用いて表し，φ のガウス曲率 K は恒等的に 0 であることを示せ.

(D) 距離空間 (X,d) の空でないコンパクトな部分集合全体のなす集合を $\mathcal{K}(X)$ とし，A, $B \in \mathcal{K}(X)$ に対し，

$$d_H(A,B) = \max\left\{\sup_{a\in A} d(a,B),\ \sup_{b\in B} d(b,A)\right\}$$

とおく．ただし $Y \subset X$ に対し $d(x,Y) = \inf\limits_{y\in Y} d(x,y)$ とする．また，各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $f_n\colon X^n \to \mathcal{K}(X)$ を

$$f_n((x_1,\ldots,x_n)) = \{x_1,\ldots,x_n\}$$

で定める.

(1) d_H は $\mathcal{K}(X)$ 上の距離であることを示せ.

(2) X^n 上の距離 d_n を

$$d_n((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) = \max_{i=1,\ldots,n} d(x_i,y_i)$$

で定める．このとき f_n は連続であることを示せ.

(3) $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(X^n)$ は $\mathcal{K}(X)$ で稠密であることを示せ.

数学

[**6**] 次の (**E**), (**F**) の**両方に**解答せよ.

(**E**) 複素平面上の正則関数 $f(z) = \sin(z^3)$ を考える.

(1) $f(z)$ は $z = 0$ で 3 位の零点を持つことを示せ.

(2) $f(z)$ より定まる複素関数 $g(z) = \dfrac{f'(z)}{f(z)}$ は $z = 0$ で 1 位の極を持つことを示し, その留数を求めよ.

(3) 領域 $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 3\}$ 上の正則関数 $h(z)$ は $z = 1, -1$ においてのみ零点を持ち, その位数はそれぞれ 2, 3 であるとする. このとき複素積分

$$\int_{|z|=2} \frac{h'(z)}{h(z)} dz$$

の値を求めよ. ただし, 積分路の向きは反時計回りとする.

(**F**) 極限値

$$\lim_{n\to\infty} n \int_1^\infty \log x \, \sin\left(\frac{1}{nx^2}\right) dx$$

を求めよ. ただし $t \geq 0$ において成り立つ不等式 $\sin t \leq t$ を用いてもよい.

[**7**] 次の (**G**), (**H**), (**I**) のうち**1つを選び** 解答せよ.

(**G**) 次の性質 $(*)$ を満たす写像 $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ を考える. ただし $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{X \mid X \subset \mathbb{N}\}$ である.

$$\forall X, Y [X \subset Y \subset \mathbb{N} \;\Rightarrow\; f(X) \subset f(Y)]. \tag{$*$}$$

さらに順序数 α に関して帰納的に, $X_\alpha \subset \mathbb{N}$ を定義する：

a $X_0 = \emptyset$;

b $X_{\alpha+1} = f(X_\alpha)$;

c $X_\delta = \bigcup_{\alpha<\delta} X_\alpha$ （δ は極限順序数）.

このとき, 以下に答えよ.

(1) 任意の α で $X_\alpha \subset X_{\alpha+1}$ となることを α に関する超限帰納法で示せ.

(2) 任意の $\alpha < \beta$ で $X_\alpha \subset X_\beta$ となることを β に関する超限帰納法で示せ.

(3) $X_{\alpha^*} = X_{\alpha^*+1}$ となる可算順序数 α^* が存在することを示せ.

(H) R をユークリッド整域とし，$a, b \in R$ とする．$g \in R$ が a, b の最大公約元（GCD）であるとは，次の (a)，(b) を満たすことである．

(a) $g \mid a$，$g \mid b$ である．

(b) $d \mid a$，$d \mid b$ なる任意の $d \in R$ について $d \mid g$ である．

次の問いに答えよ．

(1) g, g' がともに a, b の GCD であれば，単元 u が存在して $gu = g'$ であることを示せ．

(2) $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ （i は虚数単位）における単元をすべて求めよ．

(3) $\mathbb{Z}[i]$ において, $7 + i$ と $-6 + 8i$ の GCD を 1 つ求めよ．

(4) (3) で求めた GCD を g として，$(7 + i)s + (-6 + 8i)t = g$ となるような $s, t \in \mathbb{Z}[i]$ を 1 組求めよ．

(I) 確率変数 X は次の確率密度関数

$$f(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\pi\beta}x} \exp\Big(- \dfrac{(\log x - \alpha)^2}{\beta} \Big) & (x > 0), \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

をもつとし，この分布から無作為標本 $X_1, ..., X_n$（$n \geq 2$）を抽出したとする．ただし，α は実数，β は正の実数とする．

(1) 標準正規分布の累積分布関数を $\Phi(\cdot)$ とする．X の累積分布関数を $\Phi(\cdot)$ を用いて表せ．

(2) $X_1, ..., X_n$ に基づく α と β の最尤推定量をそれぞれ求めよ．

(3) (2) で求めた α と β の最尤推定量の平均（期待値）をそれぞれ求めよ．