平成２８年度

筑波大学大学院 数理物質科学研究科 入学試験

数学専攻 試験問題

専門科目

注意事項

1. 問題冊子はこの表紙を入れて６枚からなる。試験開始の合図があるまでは問題冊子を開けないこと。

2. 問題は専門基礎課題が３題（[1],[2],[3]）と専門課題が４題（[4],[5],[6],[7]）の合計７題ある。そのうち４題選択し解答せよ。ただし,
[4] を選択する場合には (A), (B) のいずれか一つに答えよ。両方を選ぶことはできない。
[5] を選択する場合には (C), (D) のいずれか一つに答えよ。両方を選ぶことはできない。
[7] を選択する場合には (E), (F), (G) のいずれか一つに答えよ。二つ以上を選ぶことはできない。

3. 答案冊子は答案用紙４枚からなる。それぞれの答案用紙に，研究科名・専攻名・受験番号を記入すること。解答は答案用紙１枚につき１題とし，それぞれの答案用紙の左上に解答する問題番号を記入せよ。また，[4], [5], [7] では (A), (B), (C), (D), (E), (F), (G) の記号も記入せよ。おもて面だけで書ききれない場合には,「ウラへ」と明記して裏面を使用してよい。

4. 下書用紙は４枚ある。それぞれの下書用紙に，研究科名・専攻名・受験番号を記入すること。

5. 問題冊子も下書用紙も回収する。

数学

注意　$\mathbb{C}$ は複素数全体, $\mathbb{R}$ は実数全体, $\mathbb{Q}$ は有理数全体, $\mathbb{Z}$ は整数全体, $\mathbb{N}$ は自然数全体をそれぞれ表すものとする.

[1] $0 < p < 1$ とする. また $s, t > 0$ に対してベータ関数 $B(s,t)$ とガンマ関数 $\Gamma(s)$ は広義積分により

$$B(s,t) = \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}dx,$$
$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx$$

と定義される. 以下の問いに答えよ.

(1) 広義積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(\sin\theta)^p}d\theta$ をベータ関数 $B(s,t)$ を用いて表せ.

(2) $a, b > 0$ に対して

$$D_{a,b} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0, ax + by \neq 0\}$$

とおく. 広義積分

$$\iint_{D_{a,b}} \frac{1}{|ax+by|^p} \exp\left(-x^2 - y^2\right) dxdy$$

をガンマ関数 $\Gamma(s)$ とベータ関数 $B(s,t)$ を用いて表せ.

[2] 実数 a, b に対して, 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & a \\ -1 & 2 & -1 \\ b & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

で定義する.

(1) A の階数 $\mathrm{rank}\, A$ を求めよ.

(2) $\mathrm{rank}\, A = 2$ となるような整数の組 (a, b) をすべて求めよ.

(3) $\mathrm{rank}\, A = 2$ のとき, A が対角化可能でないような整数の組 (a, b) をすべて求めよ.

数学

[3] 空でない集合 X に対して，直積集合 $X \times X$ 上の同値関係 $\sim$ を

$$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \iff (x_1, x_2) = (y_1, y_2) \text{ または } (x_1, x_2) = (y_2, y_1)$$

で定める．商集合 $(X \times X)/{\sim}$ に対し，写像 $q\colon X \times X \to (X \times X)/{\sim}$ を標準射影（商写像）とする．また，$X \times X$ の部分集合 D を

$$D = \{ (x_1, x_2) \in X \times X \mid x_1 = x_2 \}$$

で定める．

(1) $X \times X$ 上の関係 $\sim$ は，確かに同値関係であることを示せ．

(2) 写像 q の D への制限 $q|D\colon D \to (X \times X)/{\sim}$ は，単射であることを示せ．

(3) 全単射 $f\colon q(D) \to X$ が存在することを示せ．

[4] 次の (A), (B) のうち **1つを選び** 解答せよ．

(A) 有理数の集合 $\mathbb{Q}$ における二項関係 $\sim$ を

$$a \sim b \iff a - b \in \mathbb{Z}$$

により定義する．

(1) $\sim$ は同値関係であることを示せ．

(2) $a \in \mathbb{Q}$ を含む同値類 $C(a) = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \sim a\}$ を考える．同値類の間の加法と乗法を

$$C(a) + C(b) = C(a + b), \qquad C(a)C(b) = C(ab)$$

で定義したい．これらが well-defined か判定せよ．

(3) 全ての元の位数が有限であるような無限群の例をあげよ．

(4) 全ての元の位数が 2 以下であるような無限群の例をあげよ．

数学

(B) $K[x]$ を体 K 上の多項式環とし，$f(x) = x^3 + x + 1 \in K[x]$ の生成するイデアルを $(f(x))$ とする．このとき剰余環 $R = K[x]/(f(x))$ について，以下の問いに答えよ．

(1) K が 2 元体 $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ のとき，R は体であることを示せ．

(2) K が 3 元体 $\mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$ のとき，R は体でないことを示せ．

(3) $K = \mathbb{F}_3$ のとき，環 R の単元群 $U(R)$ の位数 (サイズ) を求めよ．

[5] 次の (C), (D) のうち **1 つを選び** 解答せよ．

(C) M を C^∞ 級多様体とし，$C^\infty(M)$ を M 上の C^∞ 級関数全体の集合とする．関数 $h \in C^\infty(M)$ の臨界点全体の集合を $C(h)$ で表す．2 つの関数 $f, g \in C^\infty(M)$ に対して，和 $f + g \in C^\infty(M)$ および積 $fg \in C^\infty(M)$ は，それぞれ

$$(f+g)(p) = f(p) + g(p), \quad (fg)(p) = f(p)g(p) \qquad (p \in M)$$

で定義される．以下が成り立つことを示せ．

(1) $C(f) \cap C(g) \subset C(f+g) \cap C(fg)$.

(2) M の部分集合 L を

$$L = (C(f+g) \cap C(fg)) \setminus (C(f) \cap C(g))$$

で定めるとき，すべての $p \in L$ に対して $f(p) = g(p)$ である．

(3) 次の 2 つの条件は同値である．

(a) $M = C(f+g) \cap C(fg)$.

(b) $M = C(f) \cap C(g)$.

(D) $\mathbb{R}$ および、$\mathbb{R}^2$ には標準的な距離位相を与えておく．連続写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を

$$f(a, b) = ab$$

として定義する．このとき、以下の問いに答えよ．

(1) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ は連結でないことを示せ．

(2) $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ は弧状連結であることを示せ．

(3) $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ のとき、$f^{-1}(r)$ は $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ と同相であることを示せ．

数学

[6] 次の (1), (2) の**両方に**解答せよ.

(1) $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{e^{2iz}-1}$ とするとき，$f(z)$ の極を求めよ．また，複素積分 $\displaystyle\int_{|z|=1} f(z)dz$ を求めよ．ただし，積分路の向きは反時計回りとする.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^n e^{x(x-n)}dx = 0$ を示せ.

[7] 次の (E), (F), (G) のうち**1つを選び**解答せよ.

(E) $(A,<)$ を次の条件を満たす非可算整列順序集合とする.

- 任意の $a \in A$ に対し $\{b \in A \mid b < a\}$ は可算集合である.

また, A の部分集合 $L(A)$ を,

$$L(A) = \Big\{b \in A \mid \forall c \in A\Big(c < b \Rightarrow \exists d \in A(c < d < b)\Big)\Big\}$$

と定義する. 以下の問いに答えよ.

(1) A の任意の空でない部分集合は整列順序集合であることを示せ.

(2) 任意の $a \in A$ に対しある $b \in L(A)$ が存在して $a < b$ となることを示せ.

(3) $L(A)$ が非可算集合であることを示せ.

(F) p を素数とし，a, b を整数とする．次の問いに答えよ.

(1) $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$ を示せ.

(2) (1) の結果を用いて，Fermat の小定理

$$a^p \equiv a \pmod{p}$$

を証明せよ.

(3) $\mathbb{Z}/19\mathbb{Z}$ における 15 の乗法の逆元を，Fermat の小定理を用いた方法で求めよ（計算過程も示すこと）.

(4) $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$ における 15 の乗法の逆元を，拡張 Euclid 互除法を用いた方法で求めよ（計算過程も示すこと）.

数学

(G) 確率変数 X は次の確率密度関数

$$f(x,\theta) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{\pi\theta^2}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2\theta^2}\right) & (x > 0), \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

をもつとし，この分布から無作為標本 $X_1, ..., X_n$ を抽出したとする．ただし，$\theta > 0$ とする．

(1) X の平均 $E_\theta(X)$ と分散 $\mathrm{Var}_\theta(X)$ を求めよ．

(2) $X_1, ..., X_n$ を用いて，θ の不偏推定量 $\hat{\theta}_n$ を一つ与え，その分散 $\mathrm{Var}_\theta(\hat{\theta}_n)$ を求めよ．

(3) $X_1, ..., X_n$ のもつ θ に関するフィッシャー情報量 $I_n(\theta)$ を求め，(2) で与えた $\hat{\theta}_n$ の θ における効率 $(I_n(\theta)\mathrm{Var}_\theta(\hat{\theta}_n))^{-1}$ を求めよ．